

# MANUAL GENERAL DEL CURSO BÁSICO DE GEOGEBRA

## Tabla de contenido

<b>Introducción.....</b>	<b>4</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>5</b>
Objetivo General.....	5
Objetivos Específicos.....	5
<b>MÓDULO I.....</b>	<b>7</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>7</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>7</b>
Objetivo General.....	7
Objetivos Específicos.....	7
<b>Tema 1: Descripción del uso de GeoGebra.....</b>	<b>8</b>
<b>Tema 2: Proceso de descarga e instalación del software.....</b>	<b>9</b>
<b>Tema 3: Descripción del entorno.....</b>	<b>18</b>
Vista Algebraica.....	18
Vista Gráfica.....	19
Vista de Hoja de Cálculo.....	20
Barra de menú.....	21
Barra de Herramientas.....	26
Barra de entrada.....	39
<b>MÓDULO II.....</b>	<b>42</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>42</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>42</b>
Objetivo General.....	42
Objetivos Específicos.....	42

<b>Tema 1: Punto</b>	43
Punto en un objeto	51
Adosa/libera punto	52
Punto de intersección de dos objetos	53
El punto medio	56
<b>Tema 2: La línea recta</b>	59
Recta que pasa por dos puntos	60
Semirrecta	63
Segmentos entre dos puntos	67
Segmento dado un punto extremo y su longitud	67
Segmento que pasa por dos puntos	70
Vector	72
Vector entre dos puntos	73
Vector desde un punto	75
<b>Tema 3: Los polígonos</b>	76
Polígono	76
Polígono regular	78
Polígono rígido	80
<b>MÓDULO III</b>	83
<b>Introducción</b>	83
<b>Objetivos</b>	83
Objetivo General	83
Objetivos Específicos	83
<b>Tema 1 Expresiones Algebraicas</b>	84
Polinomios	84
Factorización de polinomios	84
<b>Tema 2 Ecuaciones</b>	86
Ecuaciones lineales con una y dos incógnitas	86
Solución de ecuaciones con una y dos incógnitas	86
Ecuaciones cuadráticas	90
Solución de ecuaciones cuadráticas	90
<b>Tema 3: Desigualdades</b>	92
Solución de desigualdades lineales con una incógnita	92

<b>Solución de desigualdades cuadráticas .....</b>	<b>97</b>
<b>MÓDULO IV .....</b>	<b>102</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>102</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>102</b>
Objetivo General.....	102
Objetivos Específicos.....	102
<b>Tema 1: Relaciones .....</b>	<b>103</b>
Pares ordenados .....	103
Producto cartesiano. ....	104
Gráfica de relaciones.....	104
Dominio y rango.....	111
Interceptos.....	112
<b>Tema 2: Funciones. ....</b>	<b>114</b>
Gráfica de funciones .....	114
Dominio y rango.....	114
Diferencia entre relaciones y funciones .....	114
Tipos de funciones .....	115
<b>Tema 3: Variación de las funciones en el plano .....</b>	<b>119</b>
Creación de deslizadores.....	119
Animación manual y automática .....	122
Variación de las funciones en el plano.....	125

## Introducción

---

El curso virtual básico de GeoGebra, tiene como propósito principal fortalecer el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática en el nivel de educación media, a través de la implementación y/o fortalecimiento del uso de software de uso libre como un recurso que motive al estudiante en el aprendizaje de la matemática ante toda la problemática que enfrenta el sistema educativo nacional, con el avance que la tecnología ha tenido en los últimos años y los retos que el mundo globalizado pone con el uso de las TIC.

El curso básico de “GeoGebra está orientados a docentes de educación media que se dedican a la enseñanza de la Matemáticas, como parte de la formación continua que la Dirección Nacional de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación del Ministerio de Educación mantiene en apoyo a las políticas actuales de educación en El Salvador. En ese sentido, se espera, que el aprendizaje de la matemática se vea fortalecido con la implementación del uso de GeoGebra como una herramienta en el proceso de enseñanza; y además que todos/as los participantes puedan adquirir una nueva experiencia de aprendizaje junto a sus colegas, con el apoyo del tutor virtual compartiendo y fortaleciendo la experiencia pedagógica de todos y todas.

GeoGebra es un programa gratuito y se ha convertido en una excelente herramienta en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, el participante deberá descargar la versión 4.0 desde el sitio web oficial que será presentado en el primer módulo del curso; pero para poder instalarlo necesita tener al menos la versión 5 del paquete java instalada en la computadora. Para la realización de este proceso y todos los que necesite durante el presente curso se presenta el presente manual así como con planes de trabajo y material multimedia que se espera favorezcan significativamente la experiencia de aprendizaje.



## Objetivos

---

### Objetivo General

Conocer los elementos generales del entorno trabajo de GeoGebra, las diferentes herramientas con que cuenta para realizar representaciones geométricas, resolver ecuaciones y desigualdades lineales, cuadráticas y graficar relaciones y funciones en el plano cartesiano, introduciendo la respectiva ley de asignación en la Barra de Entrada.

### Objetivos Específicos

- Describir las funciones de cada una de las Vistas y Barras de la interface de GeoGebra.
- Describir las herramientas con que cuenta GeoGebra para representar puntos, vectores, polígonos regulares e irregulares de diferentes números de lados.
- Describir y practicar el proceso de introducción de expresiones algebraicas, solución de ecuaciones y desigualdades lineales y cuadráticas.
- Practicar la representación gráfica de pares ordenados, relaciones y funciones de distinta clases así como su variación en el plano cartesiano.
- Presentar ejemplos que permitan el modelaje de los procesos que el participante deberá realizar en las actividades planteadas

# MÓDULO I

## ENTORNO DE TRABAJO DE GEOGEBRA

## MÓDULO I

### Introducción

---

El módulo I “**ENTORNO DE TRABAJO DE GEOGEBRA**” introduce al participante en el proceso de descarga e instalación de GeoGebra así como el conocimiento, descripción y uso de cada una de las vistas o ventanas con que cuenta el software: Barra de Menús, Barra de Entrada, opciones de menú, etc. considerando todos los elementos que forman parte del entorno en el que realizará el trabajo.

El participante deberá descargar la versión 4-0 de GeoGebra desde el sitio web propuesto, para ello necesita tener al menos la versión 5 del paquete java instalada en la computadora a utilizar, para ejecutar GeoGebra. Luego realizar el proceso de instalación. Para la realización de este proceso y todos los que necesite durante el presente módulo, cuenta con un manual así como de material multimedia de apoyo.

### Objetivos

---

#### Objetivo General

Conocer los elementos generales del entorno de GeoGebra.

#### Objetivos Específicos

- Describir las funciones de cada una de las vistas o ventanas de la interface de GeoGebra.
- Describir el uso de las principales herramientas y comandos de cada una de las barras de GeoGebra.

## Tema 1: Descripción del uso de GeoGebra

GeoGebra es un software de matemática interactivo que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo. Lo ha elaborado *Markus Hohenwarter* junto a un equipo internacional de desarrolladores.

Es un recurso educativo que se utiliza como una herramienta didáctica en la enseñanza de las Matemáticas. Los usuarios pueden hacer construcciones con puntos, segmentos, líneas, cónicas, que pueden ser modificados posteriormente, de manera dinámica.

En la enseñanza de matemática escolar sirve de ayuda para que los estudiantes puedan:

- Visualizar conceptos abstractos.
- Representar conexiones conceptuales.
- Experimentar con las matemáticas.

GeoGebra es un software matemático interactivo libre que está lleno de funcionalidades tendientes a simplificar las construcciones geométricas. Está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.

Con este software, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Tiene la capacidad de operar con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un amplio repertorio de comandos propios del Cálculo, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos. Posee cinco características distintivas:

- i. Sus gráficas son de alta calidad y pueden manipularse de forma simple para aumentar el rendimiento visual.
- ii. En relación a las ecuaciones y el sistema de coordenadas, se cuenta con una gran cantidad de funcionalidades, como por ejemplo, la gráfica de ecuaciones.
- iii. Los deslizadores son elementos con un gran potencial, ya que permiten controlar animaciones con una cierta facilidad. Ya sea la rotación de un triángulo, traslación de un punto, homotecia de un

segmento, por animación se pueden ilustrar muchísimas propiedades.

- iv. Posee una ventana de Álgebra. Un lugar donde se muestran los valores de todos los objetos de una construcción. Éstos se clasifican en tres grupos: objetos libres, son los que han sido contruidos sin depender de otros; objetos dependientes, son aquellos que total o parcialmente dependen de otros objetos; y objetos auxiliares, que son aquellos que el usuario define como tales.
- V. GeoGebra permite trabajar con objetos de geometría, álgebra, análisis y estadística. Se trata de un programa premiado en numerosas ocasiones. Se puede construir de modo muy sencillo y fácil puntos, segmentos, polígonos, rectas, vectores, cónicas, gráficas de funciones, curvas paramétricas y diagramas estadísticos. Todo ello dinámicamente, de forma que cualquier objeto puede sufrir modificaciones con un simple deslizamiento del mouse. Es gratuito y de fácil uso.

## Tema 2: Proceso de descarga e instalación del software

A continuación se detalla paso a paso el proceso de descarga e instalación de GeoGebra, a través del sitio oficial.

- Para ingresar a la página de Geogebra se puede hacer desde cualquier navegador, digitando en la barra de direcciones el siguiente url: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) ahí encontrará el software ya mencionado, y se desplegará la página que se muestra a continuación con la opción de Descarga.



The screenshot shows the GeoGebra website with the 'Referencia' menu highlighted. The 'Descarga' option is circled in red. The page includes a 'Descarga' button, a list of features, and a 'Primeros Pasos' section. The 'Ultimas Noticias' section lists recent updates and events.

**GeoGebra**  
Software de matemática, libre, para enseñar y aprender

**Descarga**

- Gráficos interactivos, álgebra y planillas dinámicas
- Todos los niveles cubiertos, desde el básico escolar al universitario
- Materiales de aprendizaje libres y gratuitos.
- Ayuda en línea completa en Español para GeoGebra 4.
- Manual en Español completo y actualizado [GeoGebra 3.2 Documento de Ayuda](#)

**Primeros Pasos**

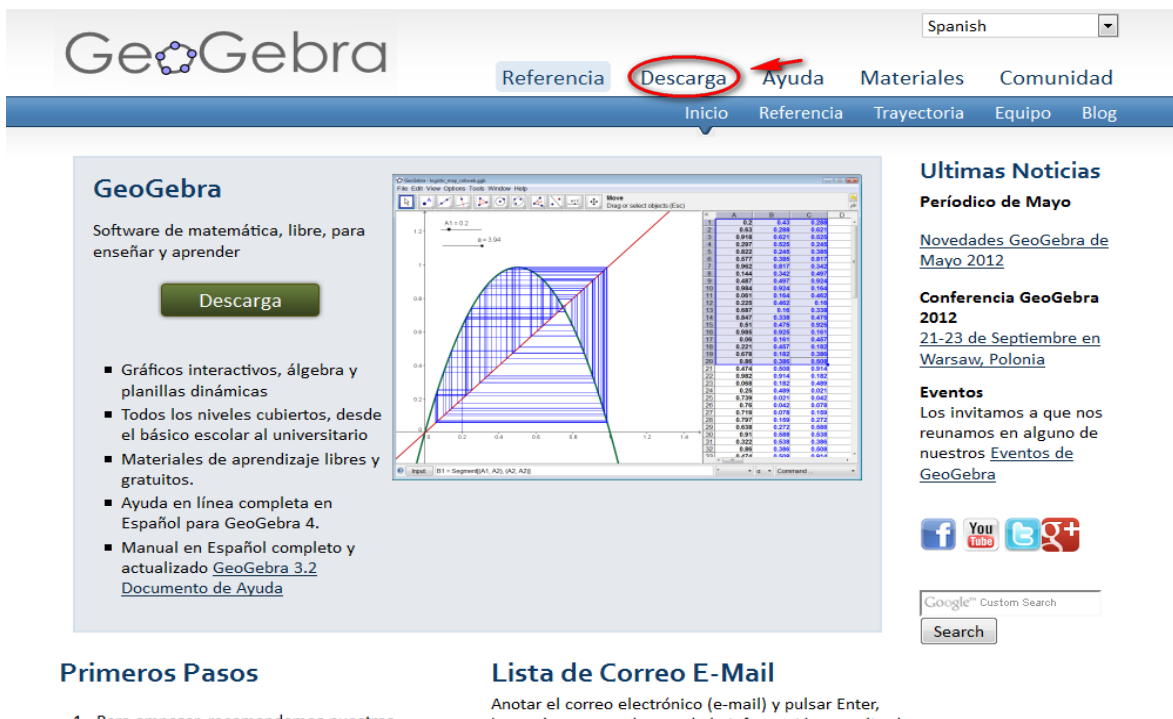
**Lista de Correo E-Mail**  
Anotar el correo electrónico (e-mail) y pulsar Enter,

**Ultimas Noticias**  
**Periodico de Mayo**  
[Novedades GeoGebra de Mayo 2012](#)  
**Conferencia GeoGebra 2012**  
[21-23 de Septiembre en Warsaw, Polonia](#)  
**Eventos**  
Los invitamos a que nos reunamos en alguno de nuestros [Eventos de GeoGebra](#)

**Referencia** **Descarga** **Ayuda** **Materiales** **Comunidad**  
**Inicio** **Referencia** **Trayectoria** **Equipo** **Blog**

Figura 1: Página de referencia de GeoGebra<sub>1</sub>

- Una vez se tenga esta pantalla, dar clic donde lo indica la flecha para iniciar la descarga del software.



The screenshot shows the GeoGebra website with the 'Descarga' menu item circled in red. The page includes a 'Descarga' button, a list of features, and a 'Primeros Pasos' section. The 'Ultimas Noticias' section lists recent updates and events.

**GeoGebra**  
Software de matemática, libre, para enseñar y aprender

**Descarga**

- Gráficos interactivos, álgebra y planillas dinámicas
- Todos los niveles cubiertos, desde el básico escolar al universitario
- Materiales de aprendizaje libres y gratuitos.
- Ayuda en línea completa en Español para GeoGebra 4.
- Manual en Español completo y actualizado [GeoGebra 3.2 Documento de Ayuda](#)

**Primeros Pasos**

**Lista de Correo E-Mail**  
Anotar el correo electrónico (e-mail) y pulsar Enter,

**Ultimas Noticias**  
**Periodico de Mayo**  
[Novedades GeoGebra de Mayo 2012](#)  
**Conferencia GeoGebra 2012**  
[21-23 de Septiembre en Warsaw, Polonia](#)  
**Eventos**  
Los invitamos a que nos reunamos en alguno de nuestros [Eventos de GeoGebra](#)

**Referencia** **Descarga** **Ayuda** **Materiales** **Comunidad**  
**Inicio** **Referencia** **Trayectoria** **Equipo** **Blog**

Figura 2: Página de referencia de GeoGebra<sub>2</sub>

- La siguiente figura muestra el mensaje que permite realizar la descarga directa del programa, dando clic en la opción instaladores de la barra que se desplegó en la parte inferior del botón descarga, tal como se indica en la figura 3.



Figura 3: Página de descarga de GeoGebra.

- La figura 4 muestra que, para dar inicio a la descarga, se debe seleccionar el tipo de sistema operativo instalado en la computadora. En este caso se está trabajando con el sistema operativo Windows.



Figura 4: Selección de sistema operativo para descargar GeoGebra.

- Una vez se haya seleccionado el tipo de sistema operativo, se desplegará el cuadro de diálogo que presenta la opción de descarga del archivo, entonces dar clic en guardar archivo.



Figura 5: Guardar archivo.

- Cuando se selecciona la opción guardar archivo, inmediatamente se inicia el proceso de descarga de los instaladores tal como lo muestra la figura 6.



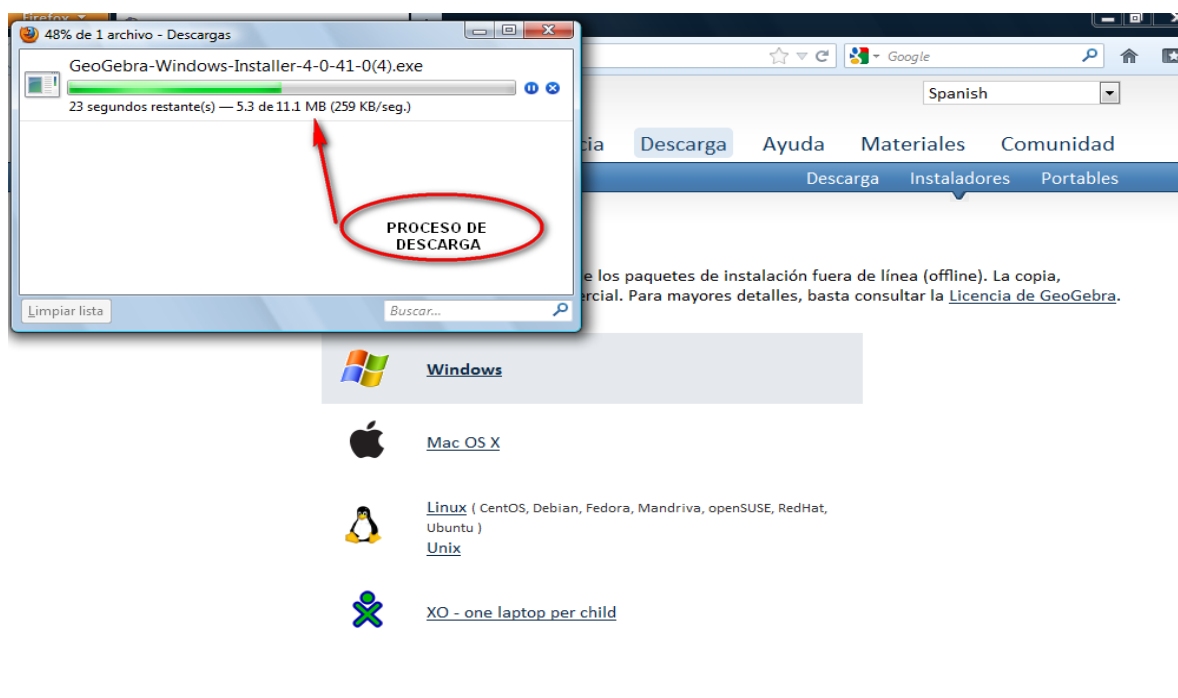


Figura 6: Descarga de GeoGebra.

- Luego de haber realizado la descarga, dar clic sobre el archivo descargado de GeoGebra tal como lo muestra la figura 7.

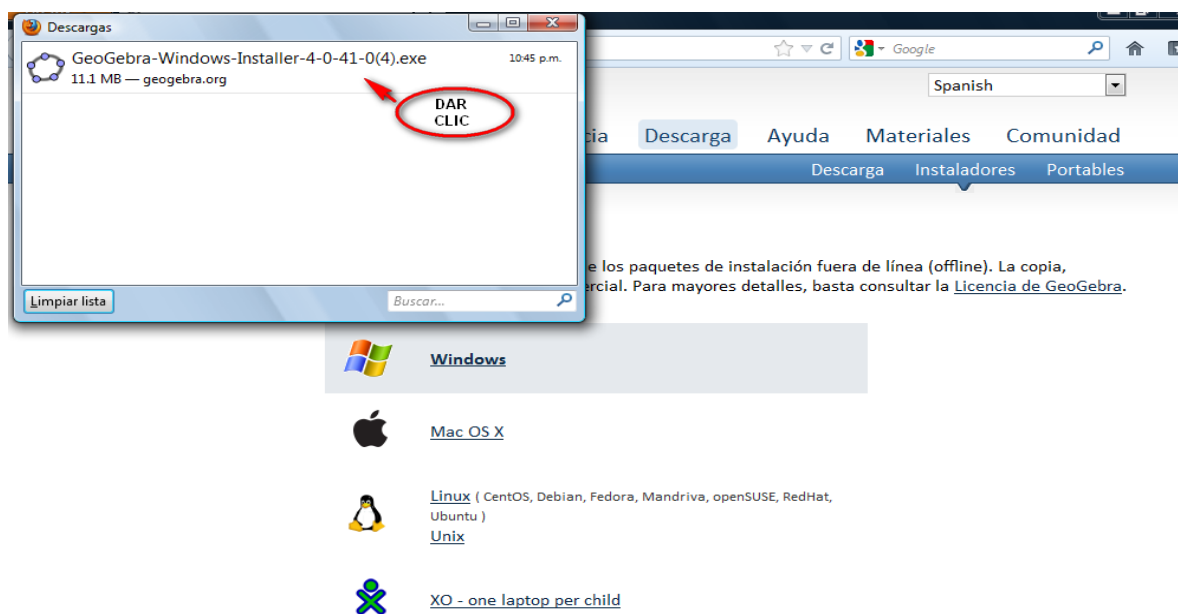


Figura 7: Instalación de GeoGebra I

- Al realizar la descarga completa, será necesario ejecutarlo dando clic donde se indica en la figura 8.



Figura 8: descarga de aplicación.

- Una vez se haya ejecutado el software en la PC, le mostrará la siguiente ventana, en donde indica el proceso de instalación de las aplicaciones que forman parte del programa; inicie seleccionando el idioma con que se desea instalar el software; luego presionar el botón siguiente.

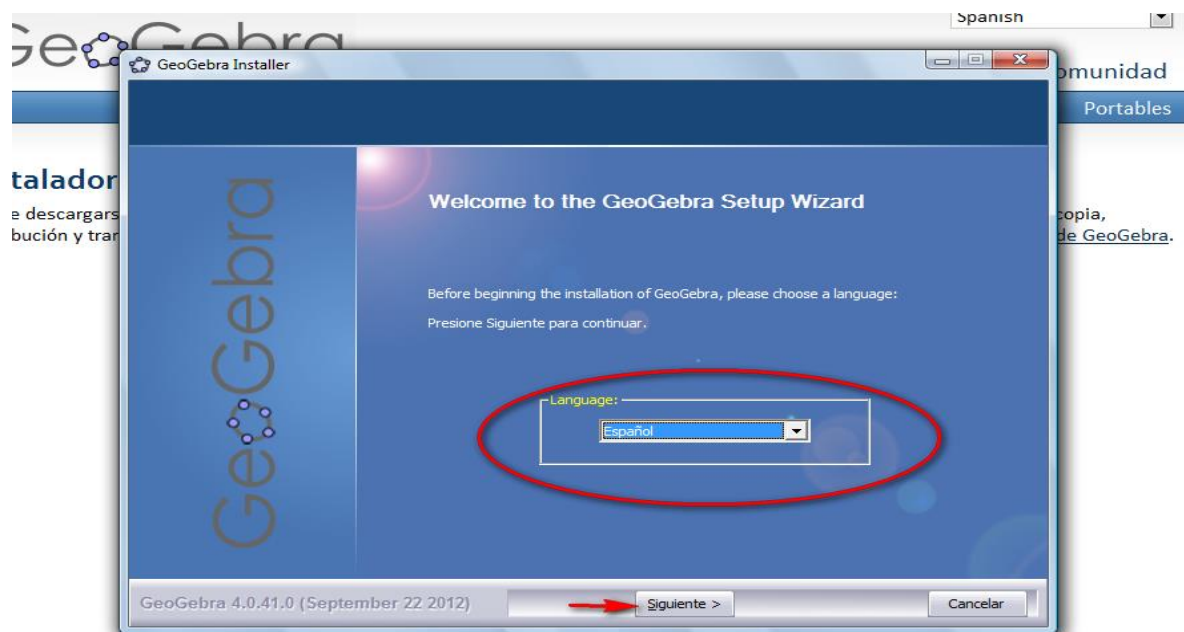


Figura 9: instalando aplicaciones

- Una vez haya seleccionado el lenguaje, se desplegará un nuevo cuadro de diálogo, donde le pregunta si acepta los términos del acuerdo para instalar GeoGebra, dar clic en Acepto y continúe.

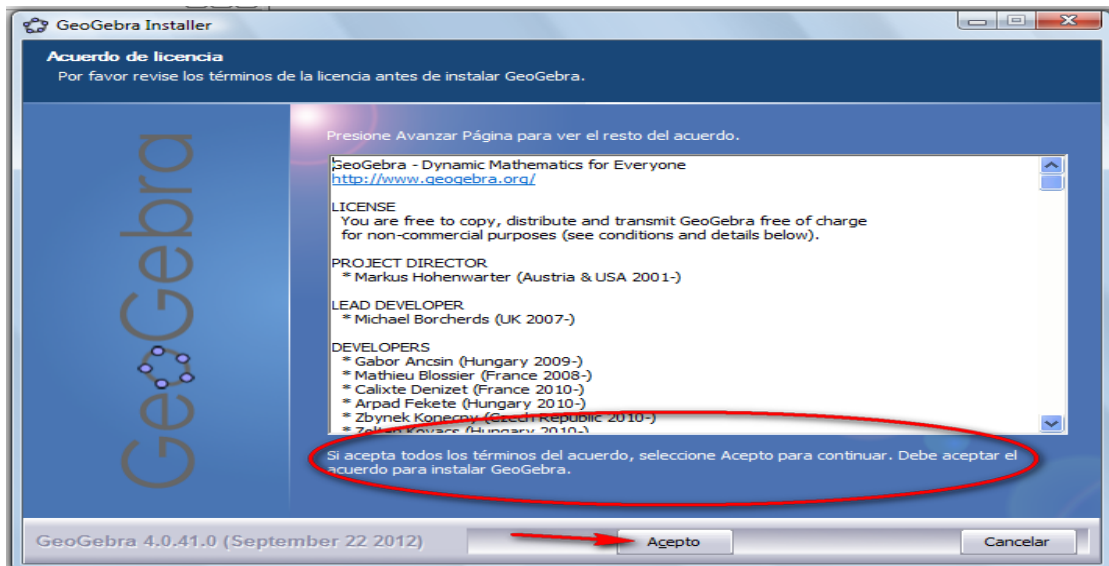


Figura 10: Aceptación de acuerdo

- Cuando haya aceptado el acuerdo de instalación, se desplegará el siguiente cuadro de diálogo donde será necesario elegir la opción de descarga del software. Es necesario elegir la opción standard para garantizar que se instalen todas las aplicaciones; luego dar clic en el botón Instalar.

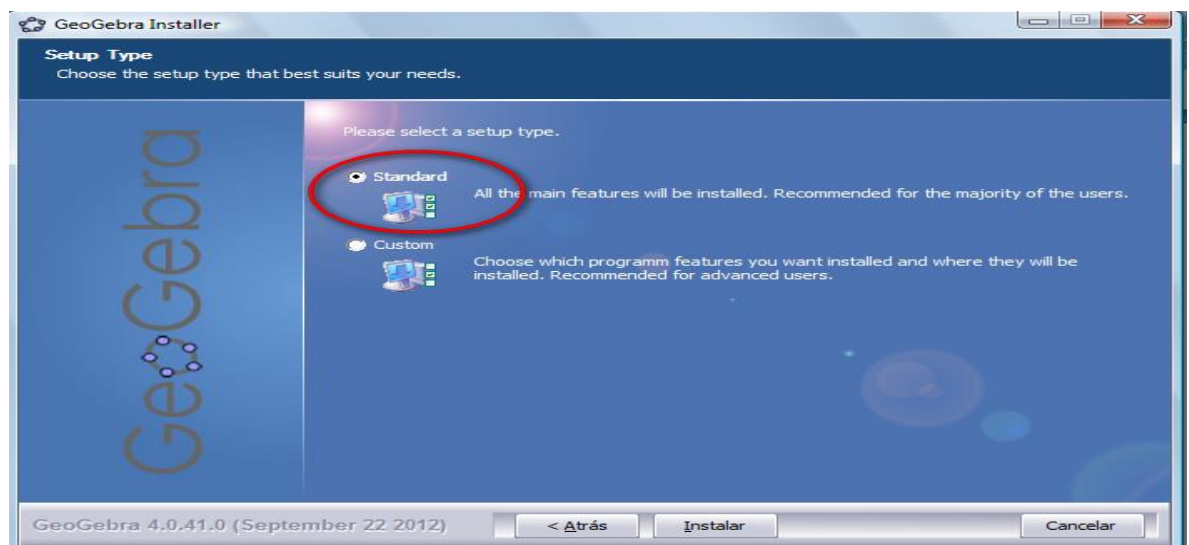


Figura 11: Tipo de instalación

- Cuando se haya culminado el proceso de instalación, se mostrará un nuevo cuadro de diálogo tal como se observa en la figura 12, donde le informa que el proceso ha terminado y da la opción de ejecutar GeoGebra, se selecciona y se da clic en el botón Terminar donde indica la flecha.

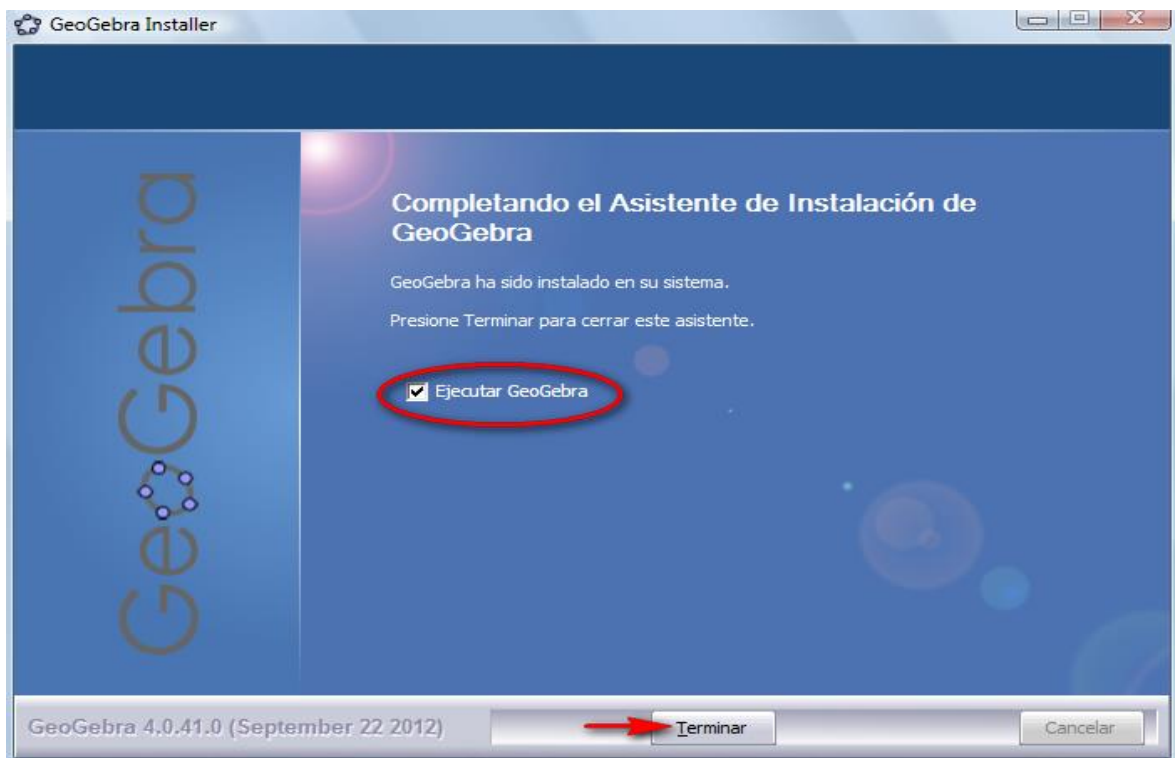


Figura 12: Terminar instalación.

- Una vez haya terminado el proceso de instalación, el programa muestra la siguiente pantalla que indica que ya está listo para cargarse y se está preparando para mostrar el entorno en el cual se trabajará.



Figura 13: Imagen de entrada

- En la siguiente figura, se muestra la página principal de GeoGebra en la que se puede ver la forma predeterminada que carga en pantalla dos de las vistas del software y es en este entorno en el que se estará desarrollando los contenidos matemáticos del curso.

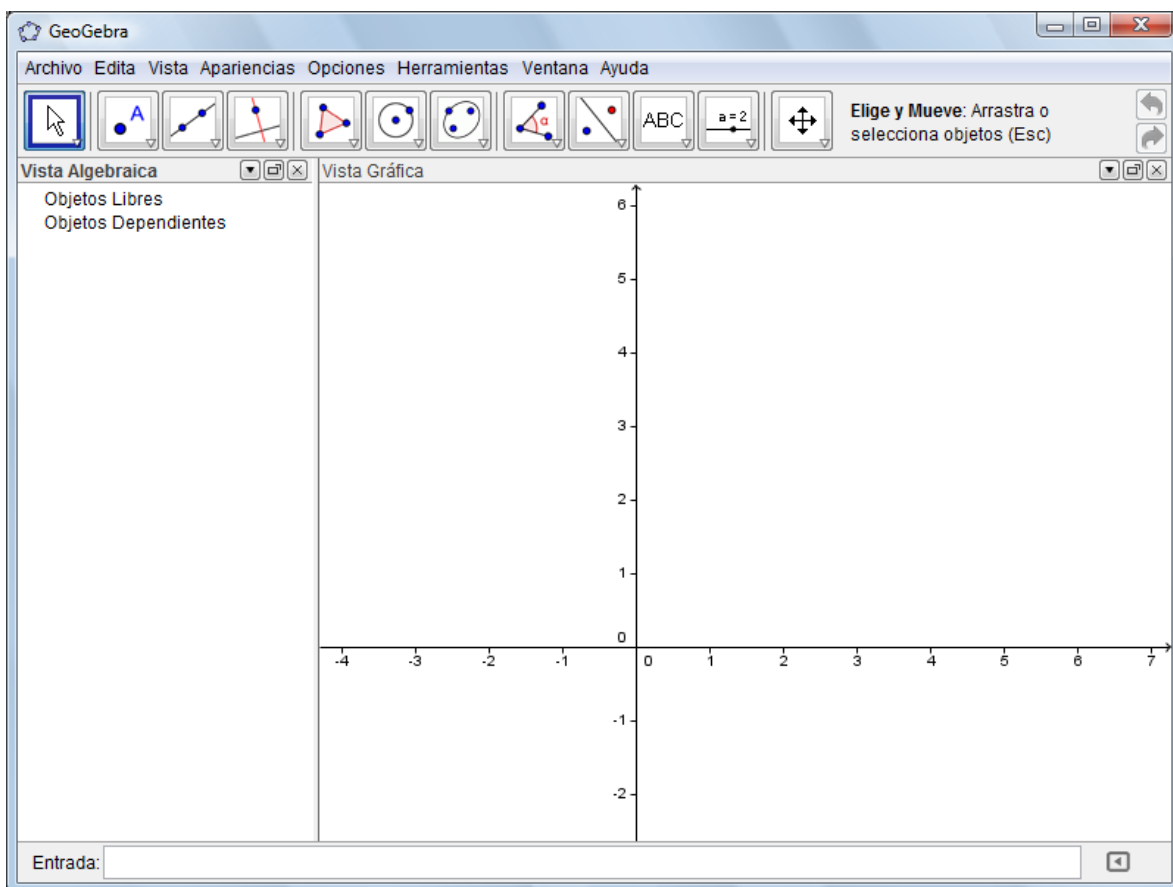


Figura 14: Interfaz de GeoGebra.

### Tema 3: Descripción del entorno

La figura 15 muestra el entorno de trabajo de GeoGebra, sus principales herramientas y características.

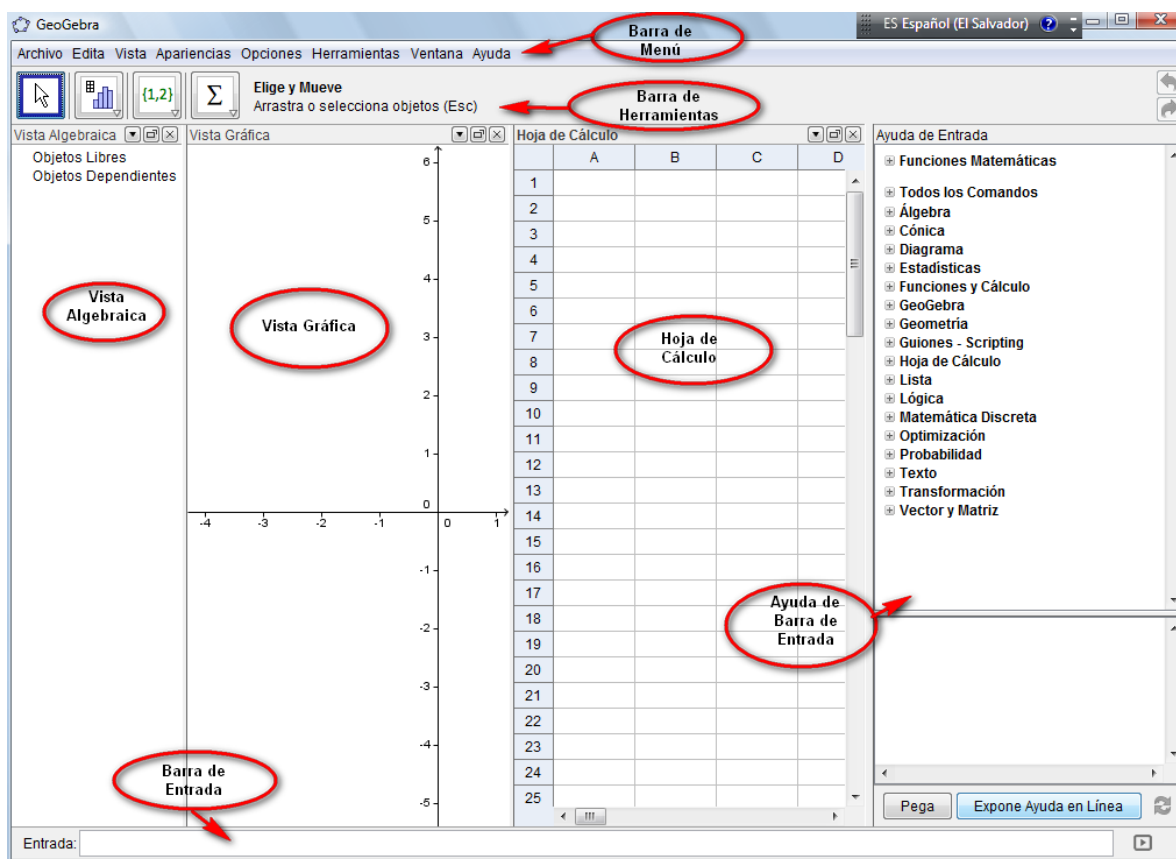


Figura 15: Entorno de GeoGebra.

#### Vista Algebraica

- En la siguiente figura se muestra la Vista Algebraica, en la que se pueden organizar los objetos en libres y dependientes. Al crear un nuevo objeto sin hacer uso de ninguno de los previos, queda establecido y clasificado como libre.



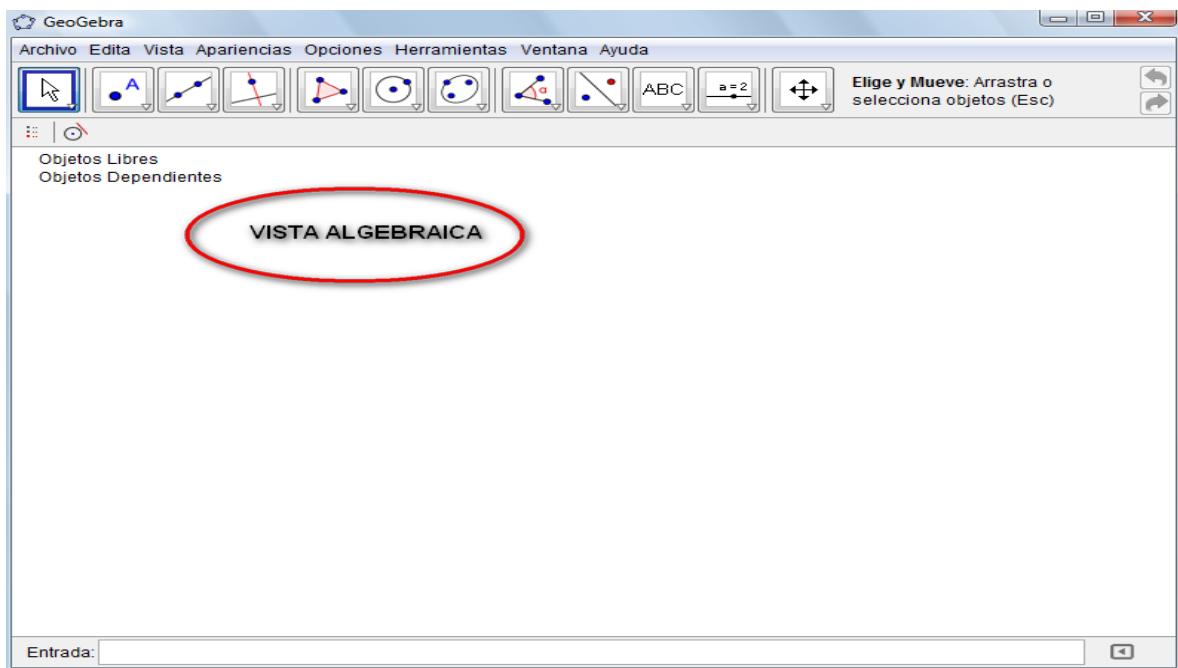


Figura 16: Vista Algebraica.

## Vista Gráfica

- La siguiente figura muestra la Vista Gráfica, que al igual que la vista de hoja de cálculo puede ser activada y desactivada desde el Menú Vista, y es donde se puede crear todo tipo de gráfica ya sean puntos, segmentos, rectas, polígonos, funciones, etc.

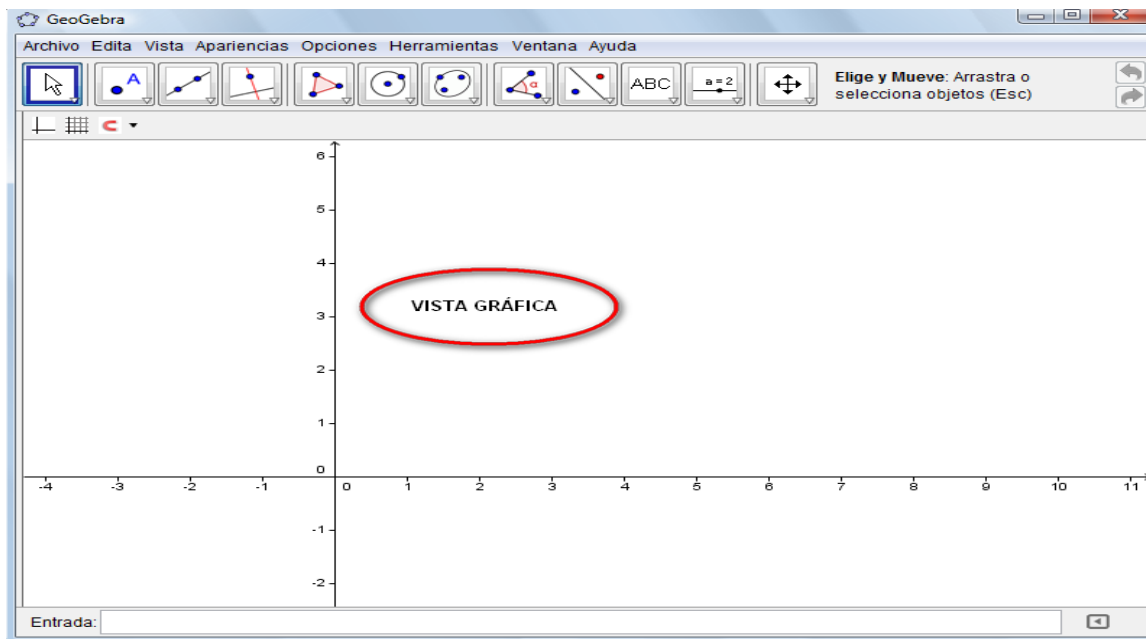


Figura 17: Vista Gráfica

## Vista de Hoja de Cálculo

- La siguiente figura, muestra la Vista de Hoja de Cálculo, que puede ser activada desde el Menú Vista. En las celdas de una Hoja de Cálculo, pueden ingresarse tanto números como cualquier otro tipo de objeto tratado por GeoGebra, sean coordenadas de puntos, funciones, comandos, textos, etc.

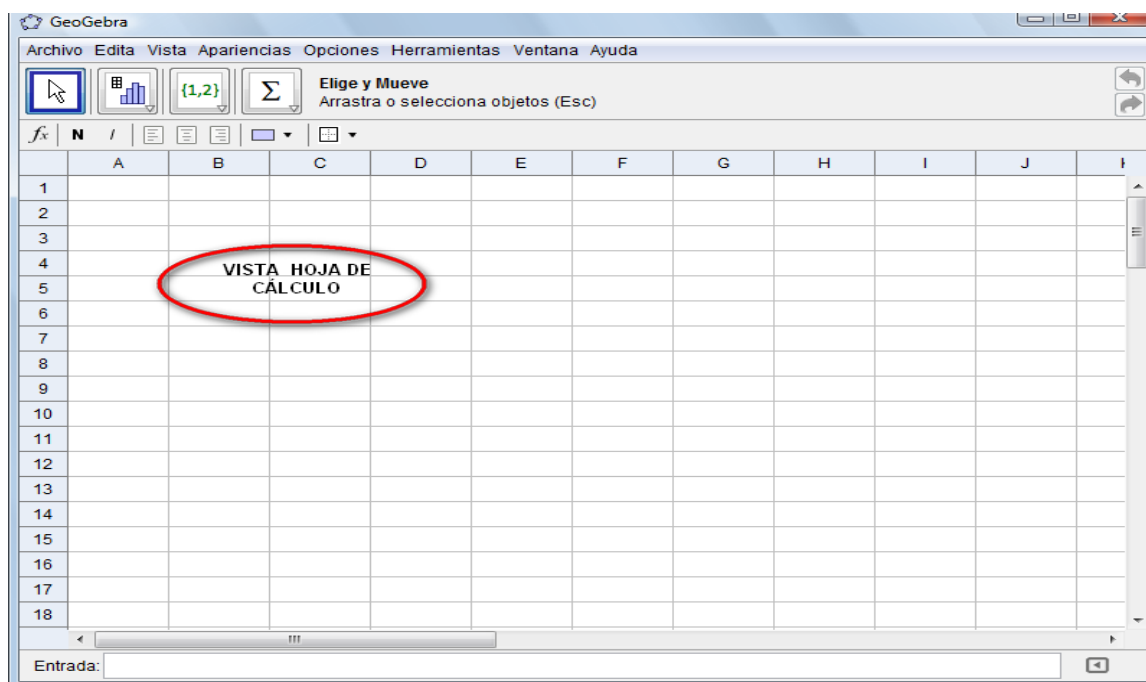


Figura 188: Hoja de Cálculo

- La siguiente figura muestra los tres tipos de vistas; que pueden ser activadas desde el Menú Vistas y que son muy útiles para resolver distintos tipos de ejercicios matemáticos.



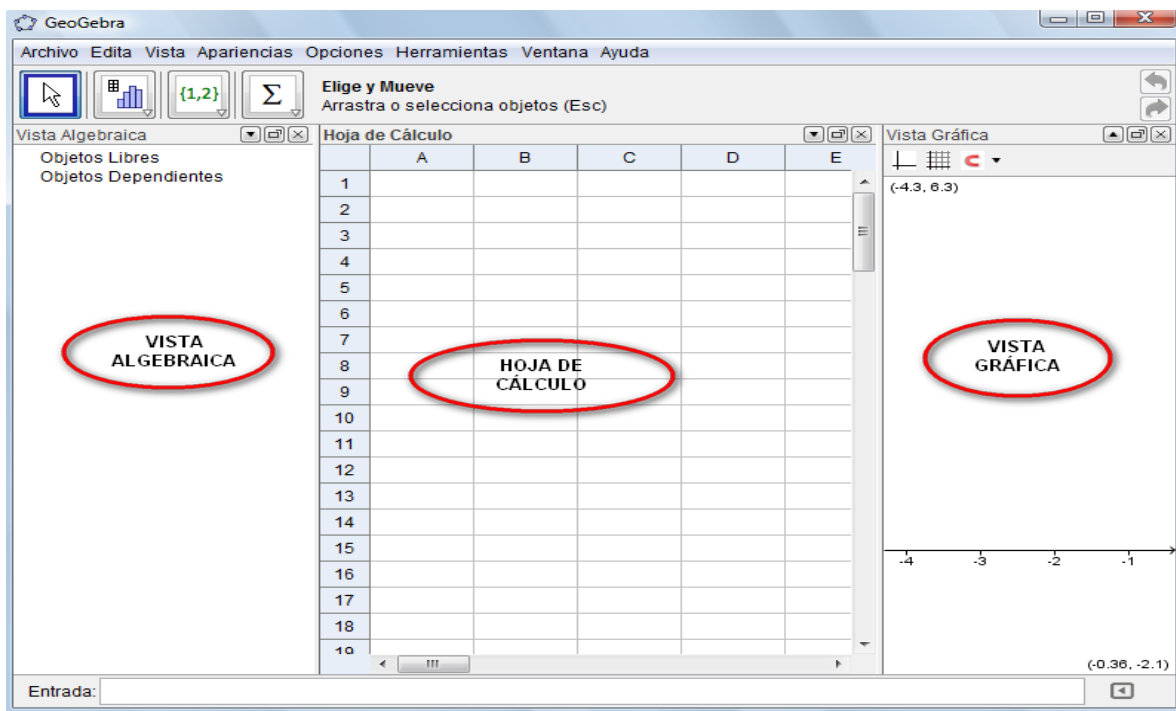


Figura 19: Vista de GeoGebra.

## Barra de menú

- La Barra de Menú, posee las siguientes opciones: Archivo, Edita, Apariencias, Herramientas Ventana y Ayuda, tal como se muestra a continuación en la figura 20.



Figura 20: Barra de Menú

- La figura 21 se muestra el Menú Archivo con todas las opciones que tiene disponibles como por ejemplo Nueva Ventana, Nuevo, Guarda, Exporta, etc. cuyas funciones serán utilizadas en el desarrollo del curso.

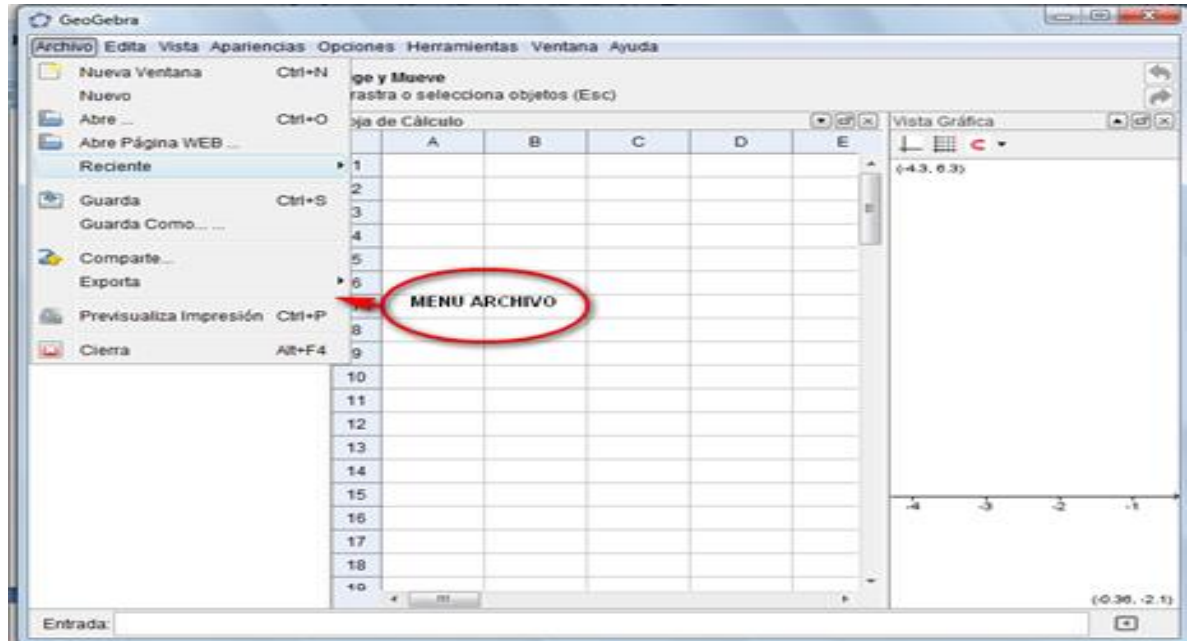


Figura 21: Menu Archivo

- La siguiente figura muestra la opción “Reciente”, del menú Archivo en ella se pueden visualizar todos los documentos recientes al darle clic al nombre que se muestra a la derecha.

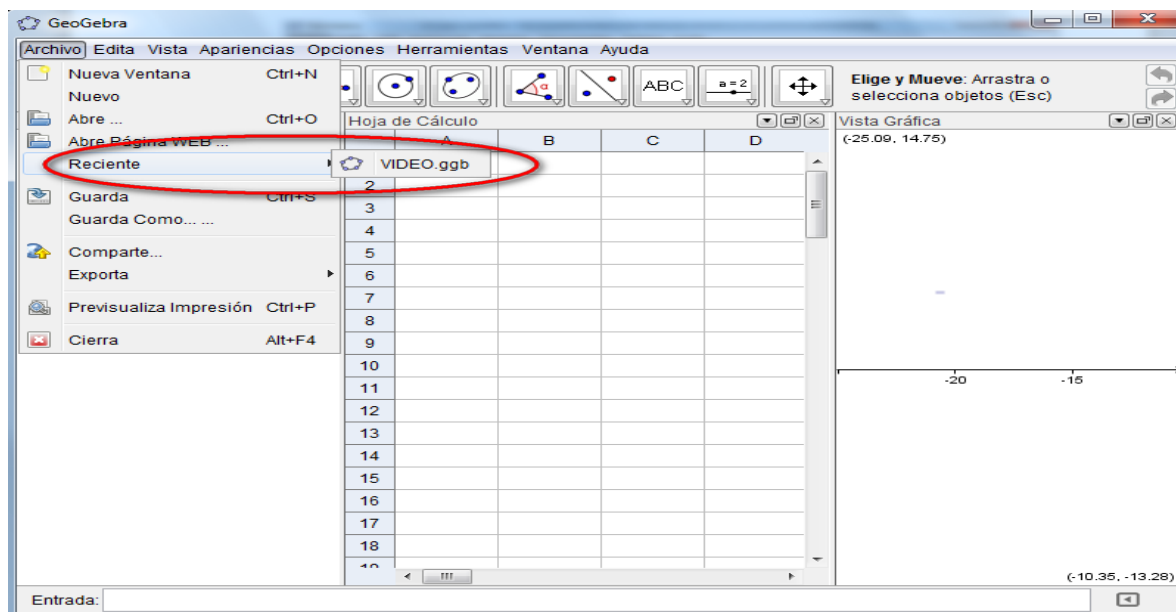


Figura 22: Vista Reciente

- En el Menú Archivo, se encuentra la opción “Exporta”, la cual permite exportar el documento recién creado a diferentes formatos como página web, imagen, gif animado, etc.

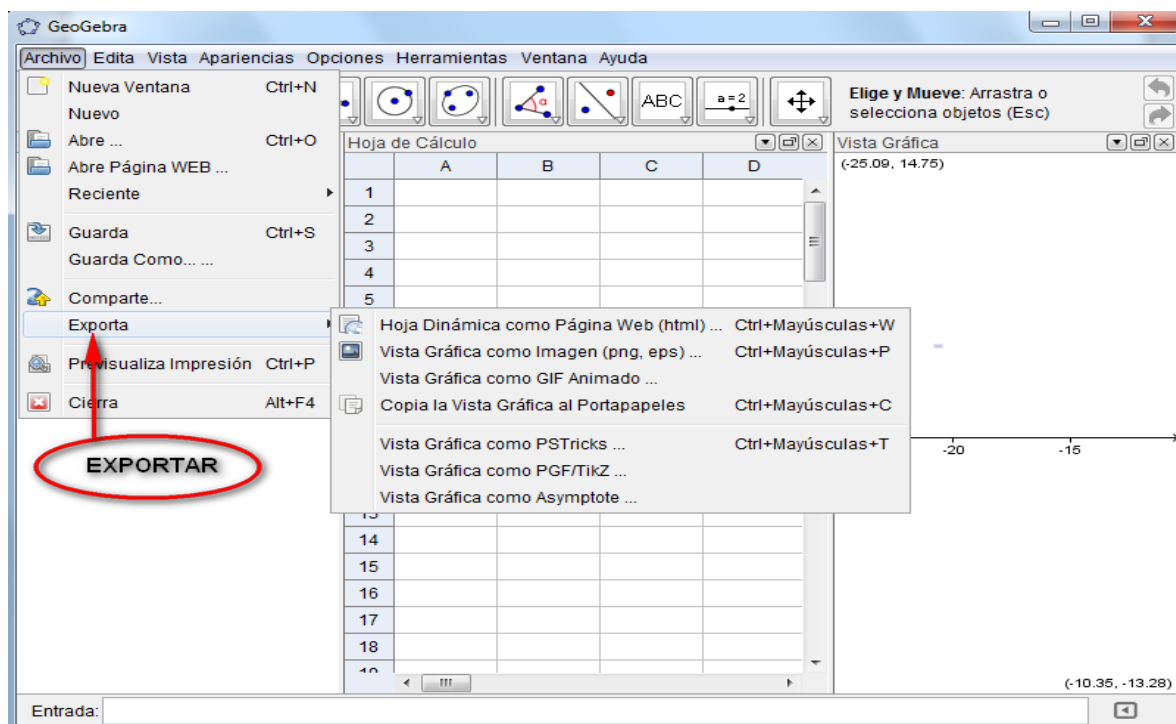


Figura 23: Vista Exportar

- En el menú “Edita” de la Barra de Menús, se puede encontrar las opciones: Deshace, Rehace, Copia, Pega, Copiar la Vista Gráfica al

Porta papel, Propiedades del Objeto y Seleccionar todo; tal como se observa en la figura siguiente.

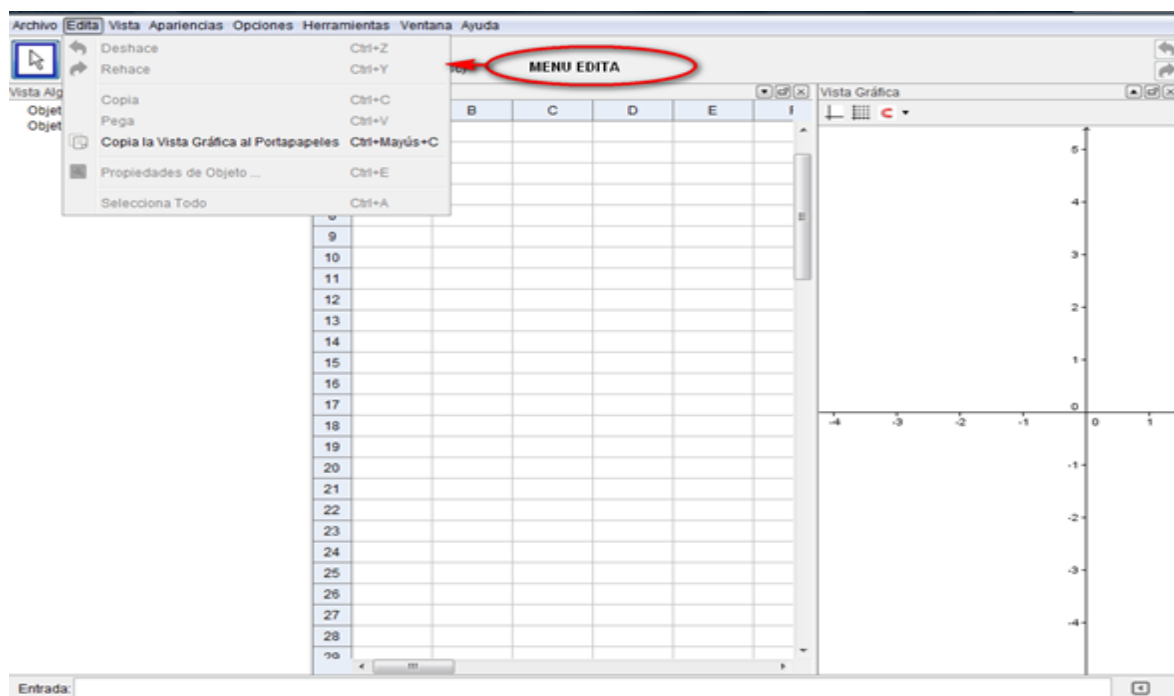


Figura 24: Menu Edita

- En el Menú Vista se encontrarán los diferentes tipos de vista que posee el programa: Vista Algebraica, Vista Hoja de Cálculo y la Vista Gráfica. También se encuentran: La Barra de Entrada, Barra de Herramientas y Barra de Navegación por Pasos de Construcción. Es desde este menú que se pueden activar y desactivar todas las opciones antes mencionadas, así como también los Ejes y la Cuadrícula.

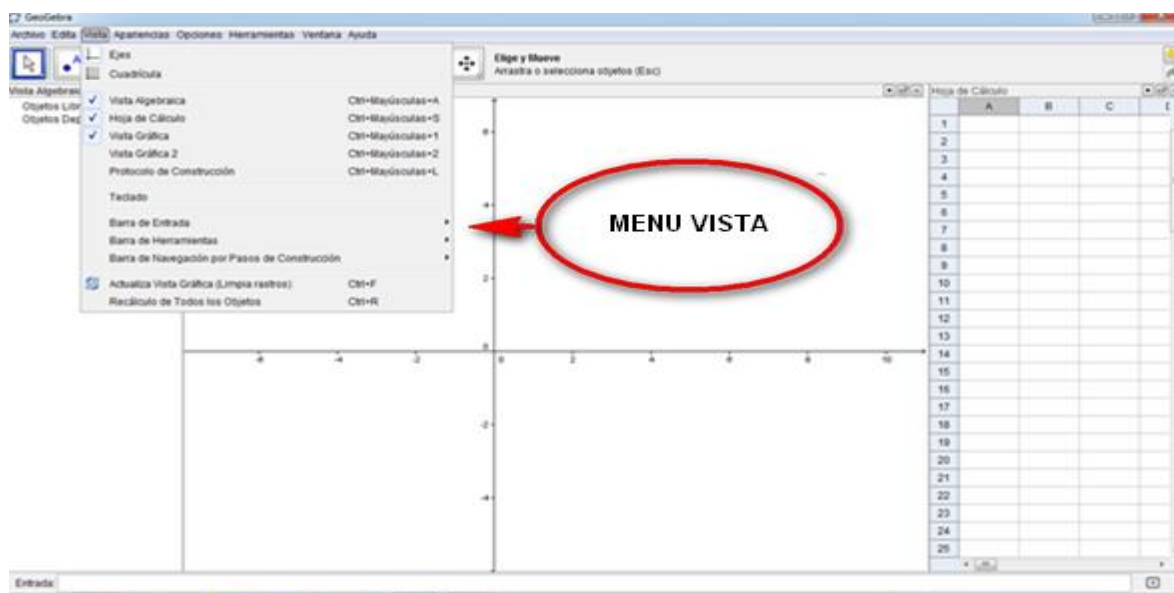


Figura 25: Menú Vista

- La figura muestra que en la opción Barra de Entrada, se pueden activar y/o desactivar las opciones de: Expone, Lista de Comandos y Expone en Margen Superior; tal como se muestra a continuación

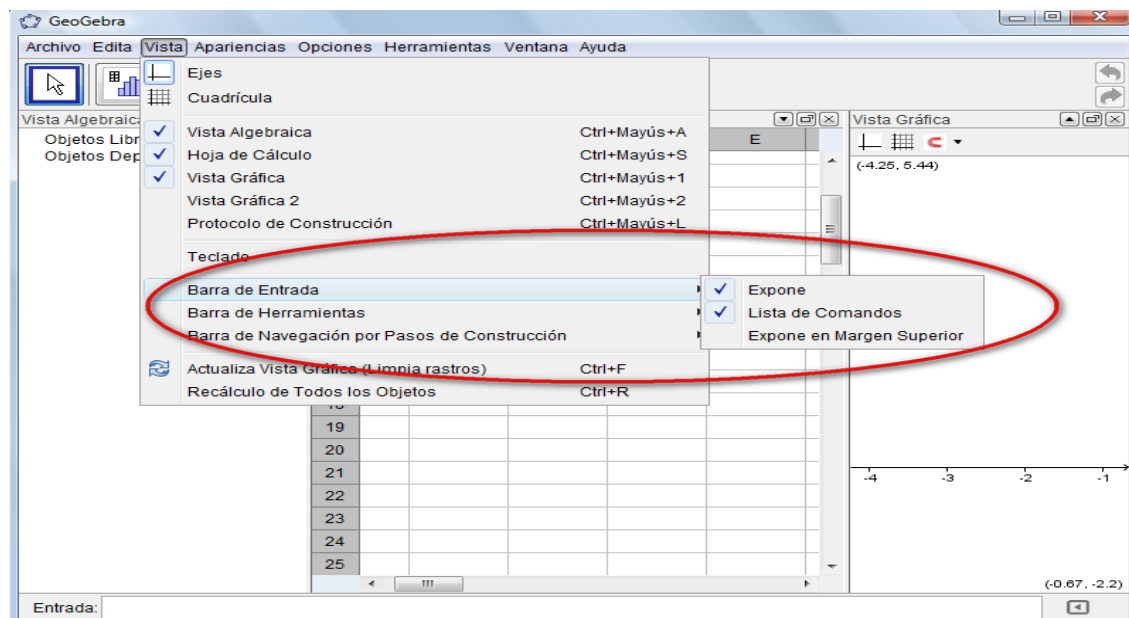


Figura 26: Menú de Barra de Entrada

## Barra de Herramientas

- La figura muestra que en menú el Vista, se encuentra la de Barra de Herramientas que habilita dos opciones, estas son: Expone y Expone en Margen Superior.

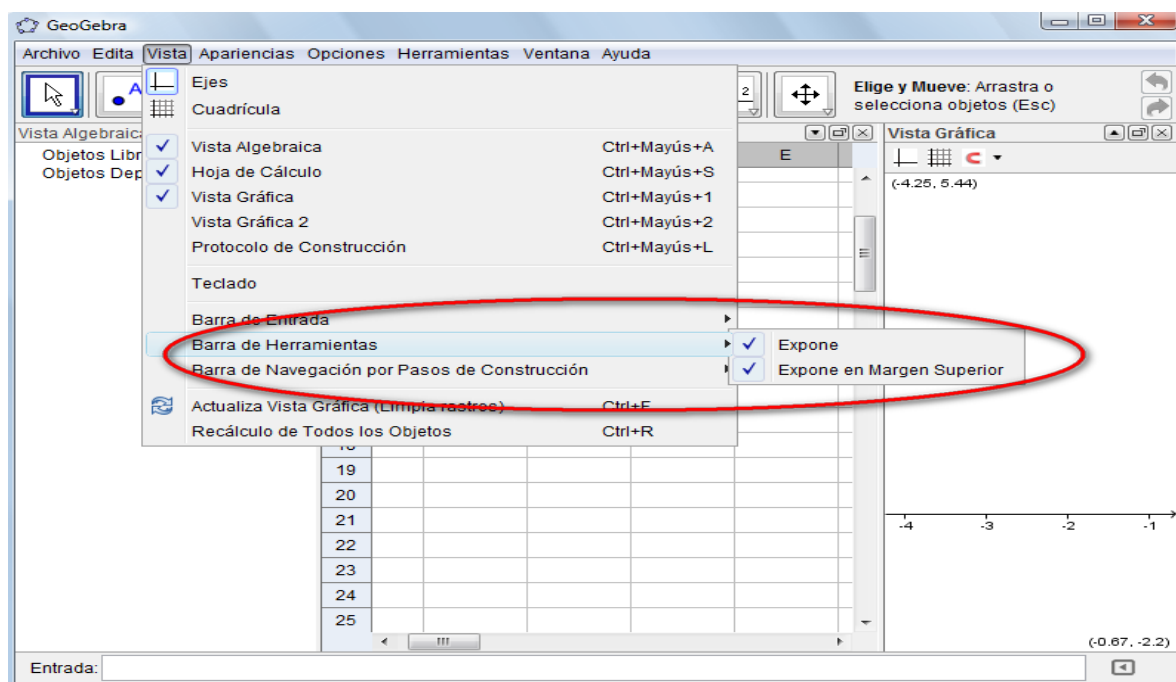


Figura 27: Menú de Barra de Herramientas

- En el menú Vista, se encuentra la opción Barra de Navegación por Pasos de Construcción, la cual permite habilitar la opción de Muestra, Botón de Reproducción y Botón de Protocolo de Construcción tal como se visualiza en la figura 28.

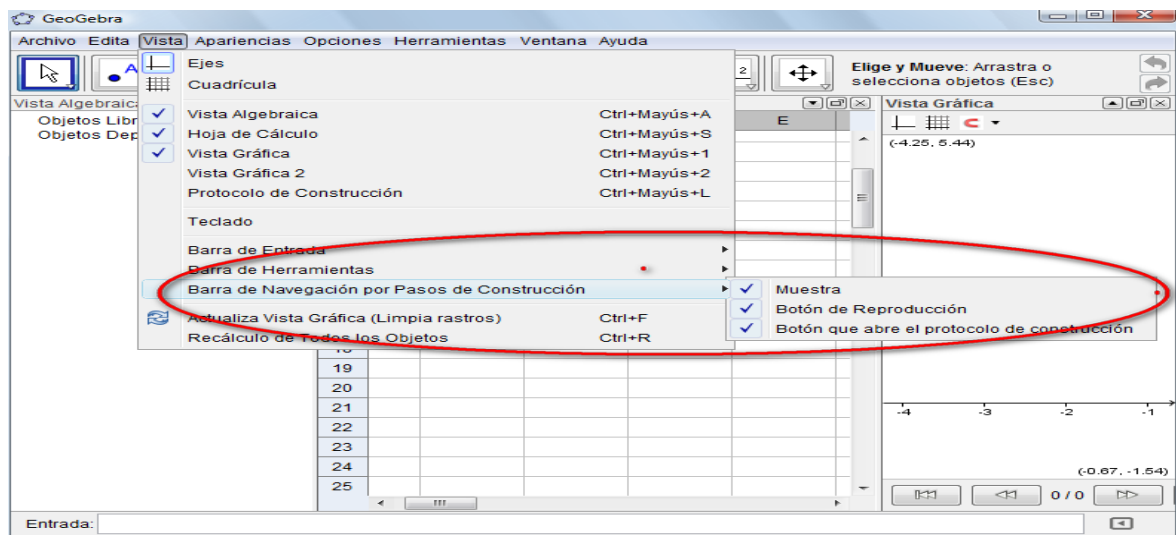


Figura 28: Menú Barra de Navegación.

- En esta figura se despliega el menú Apariencia, en él se habilitan las opciones de: Álgebra y Gráficos, Geometría Básica, Geometría, Hoja de Cálculo y Gráficos, Guarda la Apariencia Actual. También es posible crear una disposición personal, Basta con guardar la apariencia que resulte conveniente cuando se la haya establecido, desde la opción Guarda la Apariencia Actual.

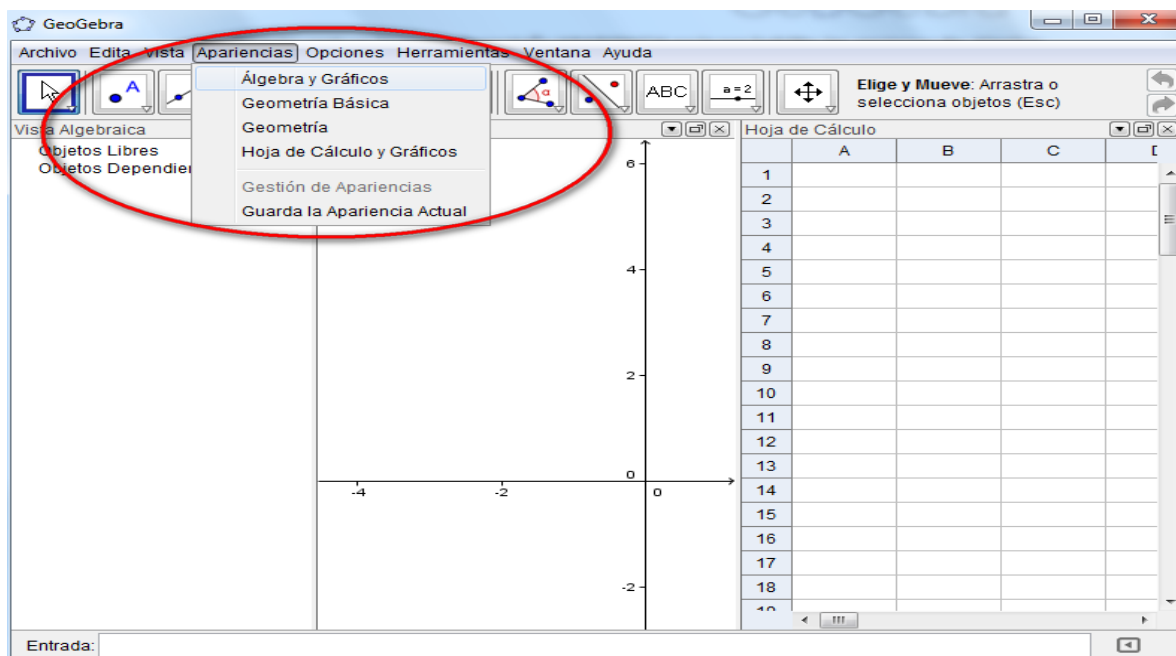


Figura 29: Menú Apariencia



- El menú Opciones, brinda las opciones como Descripción de Álgebra Atracción de Puntos o Cuadrícula entre otras; tal como se observa en la siguiente figura

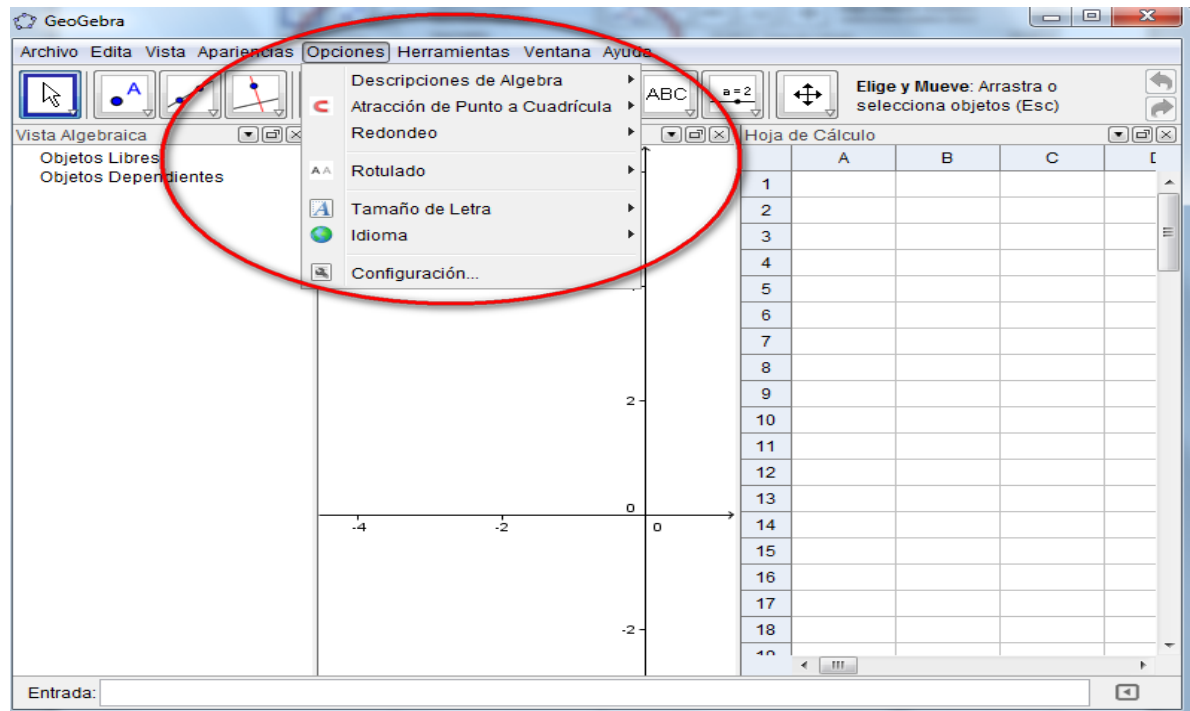


Figura 30: Menú Opciones<sub>1</sub>

- Al dar clic en la opción Descripción de Álgebra del Menú Opciones, se despliega la lista de alternativas como Valor, Definición y Comando, tal como lo muestra la siguiente figura. Éstas pueden ser modificadas desde acá, si es que se considera necesario.



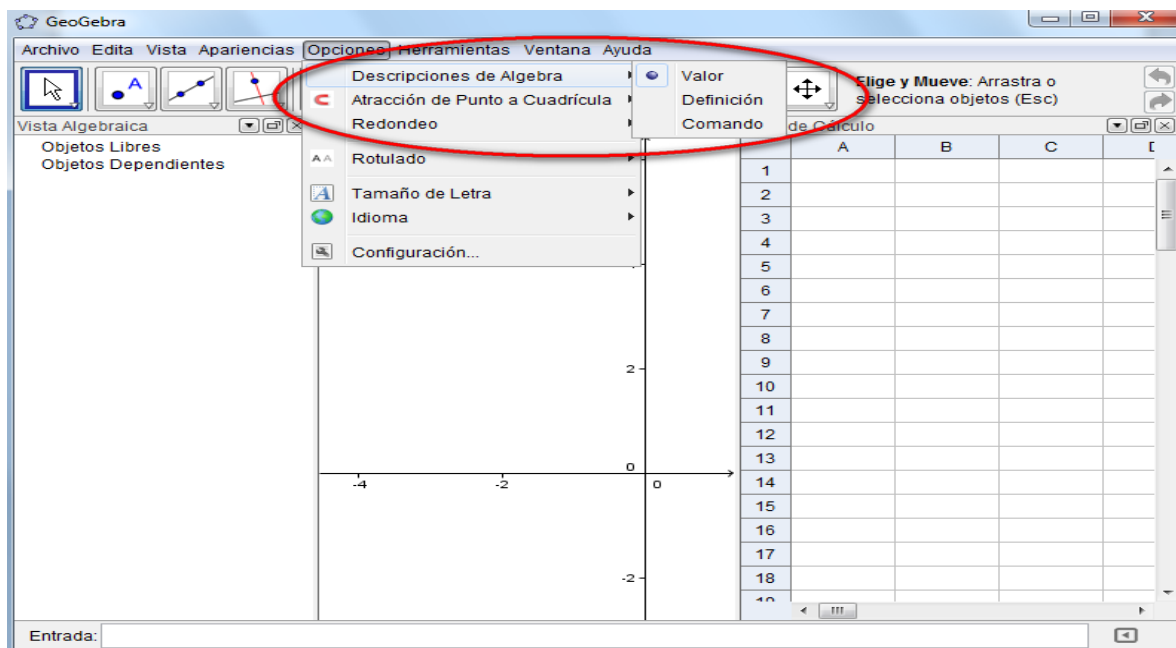


Figura 31: Menú Opciones<sub>2</sub>

- Desplegando el menú Opciones y dando clic en la alternativa Atracción de Punto a Cuadrícula se muestran los elementos: Automático, Ajusta a Cuadrícula, Fija a Cuadrícula y Desactiva.

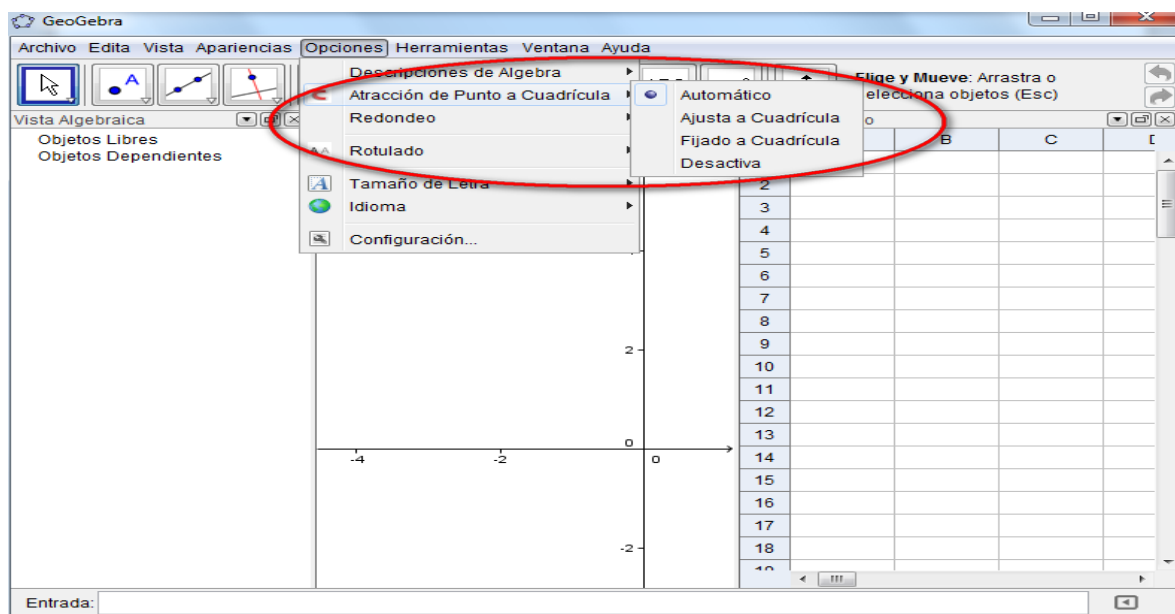


Figura 32: Atracción de un punto.

- En el menú Opciones, se encuentra el elemento Redondeo en donde se puede seleccionar entre varias alternativas la cantidad cifras decimales y/o cifras significativas.

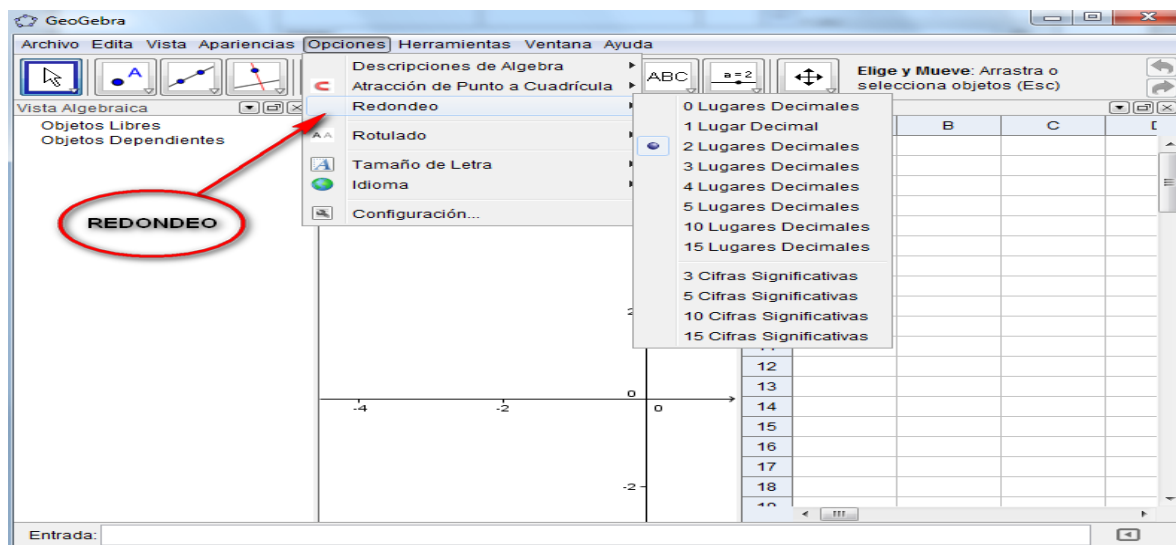


Figura 33: Redondeo

- La opción Rotulado, especifica si se expone o no el rótulo de un objeto recientemente creado, en donde se puede escoger entre las alternativas de: Automático, Todos los Nuevos Objetos, Ningún Nuevo Objeto o solo los Nuevos Puntos; tal como se muestra en la figura 34.

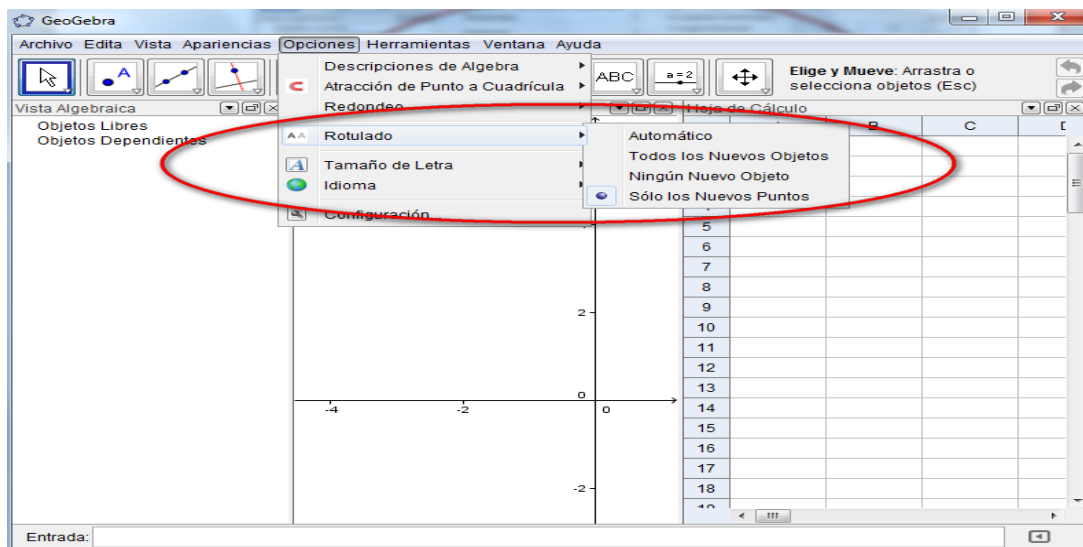


Figura 34: Rotulado

- Siempre en el menú Opciones, se encuentran las alternativas de Tamaño de letra, permitiendo cambiar el tamaño de la fuente cuando sea necesario.

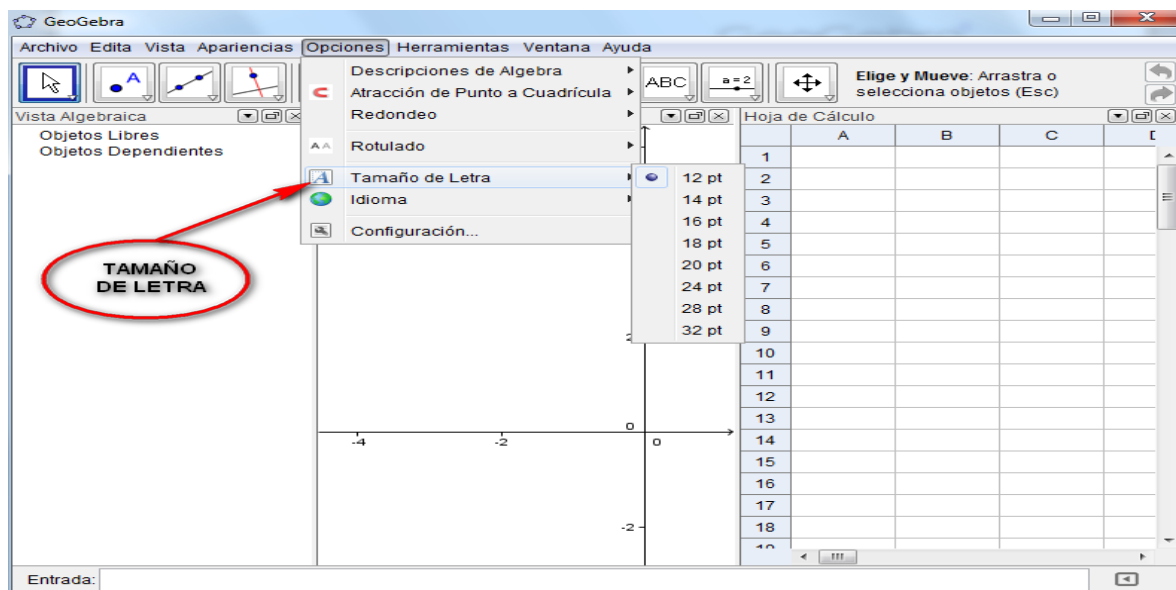


Figura 35: Tamaño de letra.

- La Opción, Idioma permite seleccionar el idioma de interés sin cambiar las propiedades y utilidades del programa.

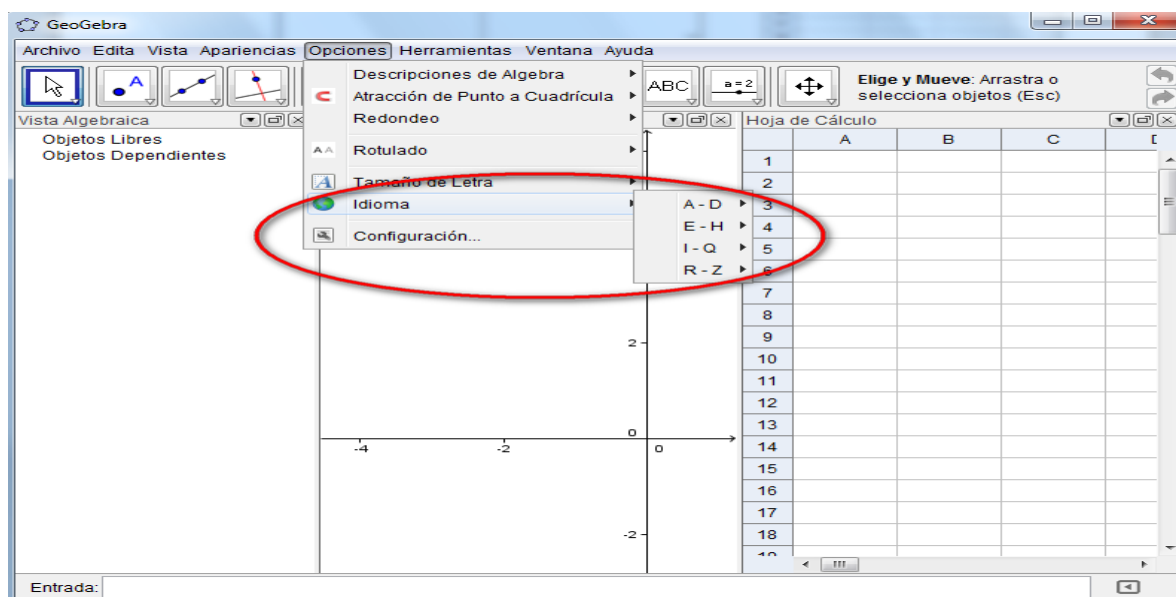


Figura 36: Idioma.

- El Menú Herramientas, muestra una variedad de cajas de herramientas que facilitan los procesos o gráficos que se desean realizar con el programa.

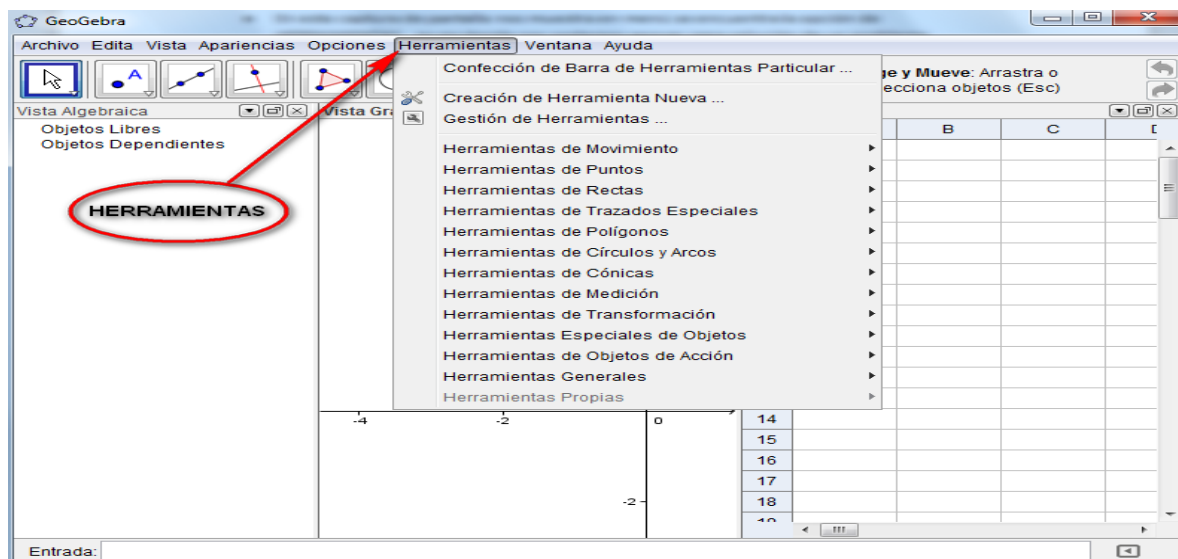


Figura 37: Herramientas.

- La opción Herramientas de movimiento, despliega una serie de opciones como: Elige y Mueve, Rota en Torno a un Punto y Registro de Hoja de Cálculo.

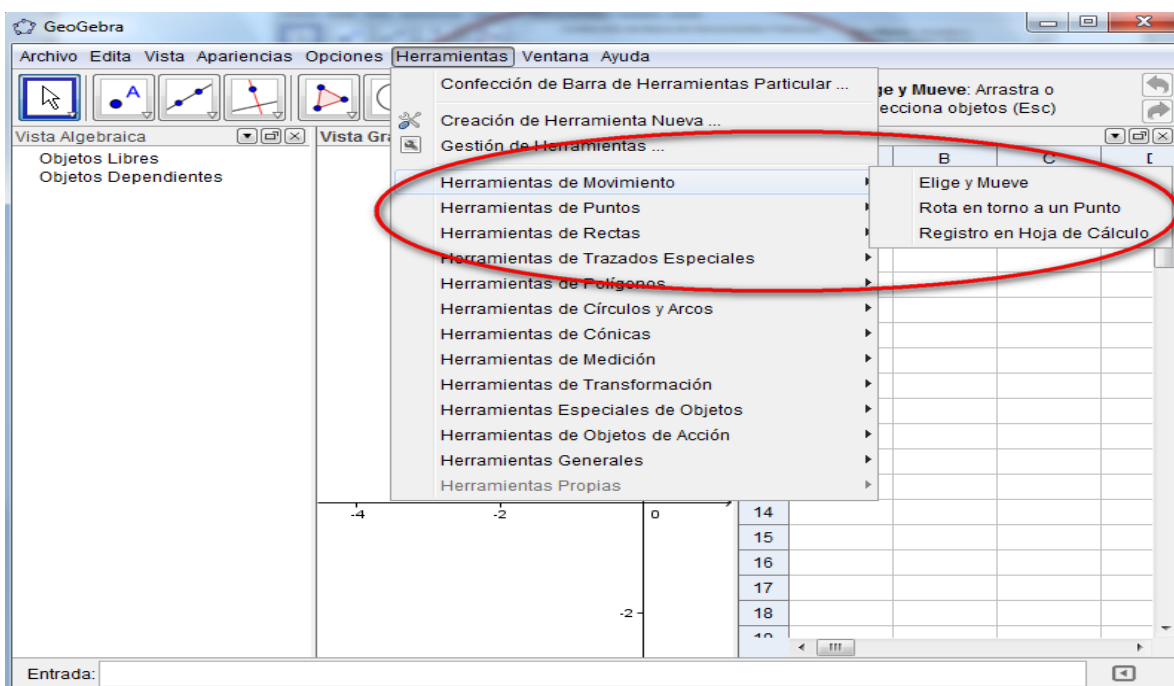


Figura 38: Herramientas de movimiento.

- En Herramientas de Puntos, se despliega la lista acciones que se pueden realizar con un punto como por ejemplo: Nuevo Punto, Punto Objeto, Adosa/Libera Punto, etc.

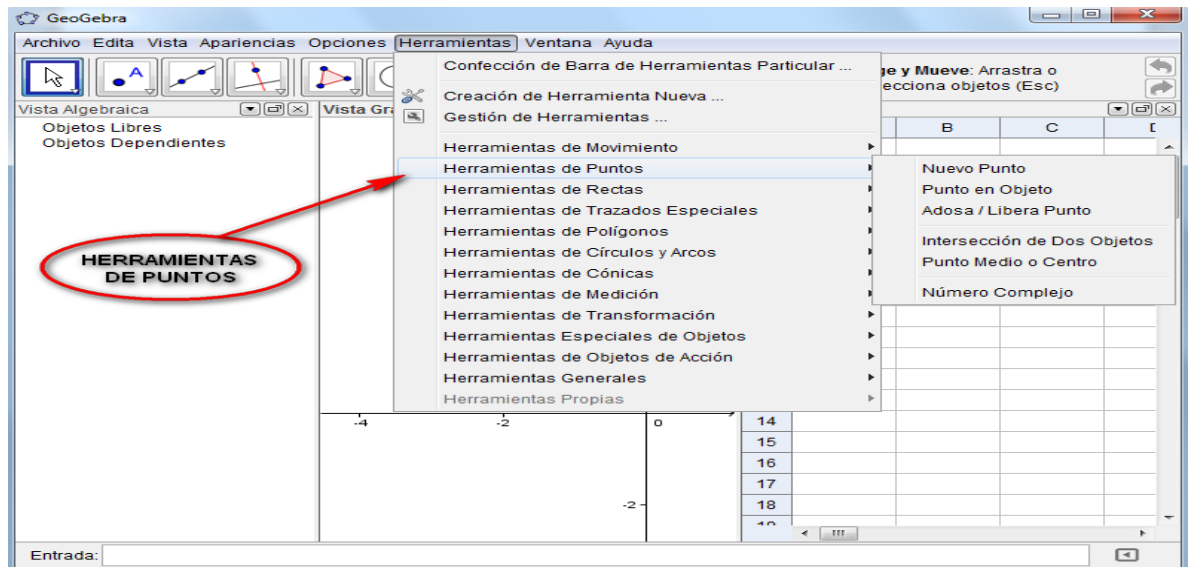


Figura 39: Herramientas de punto.

- La opción de Herramientas de Rectas permite trazar Rectas, Segmentos, Vectores, con diferentes recursos.

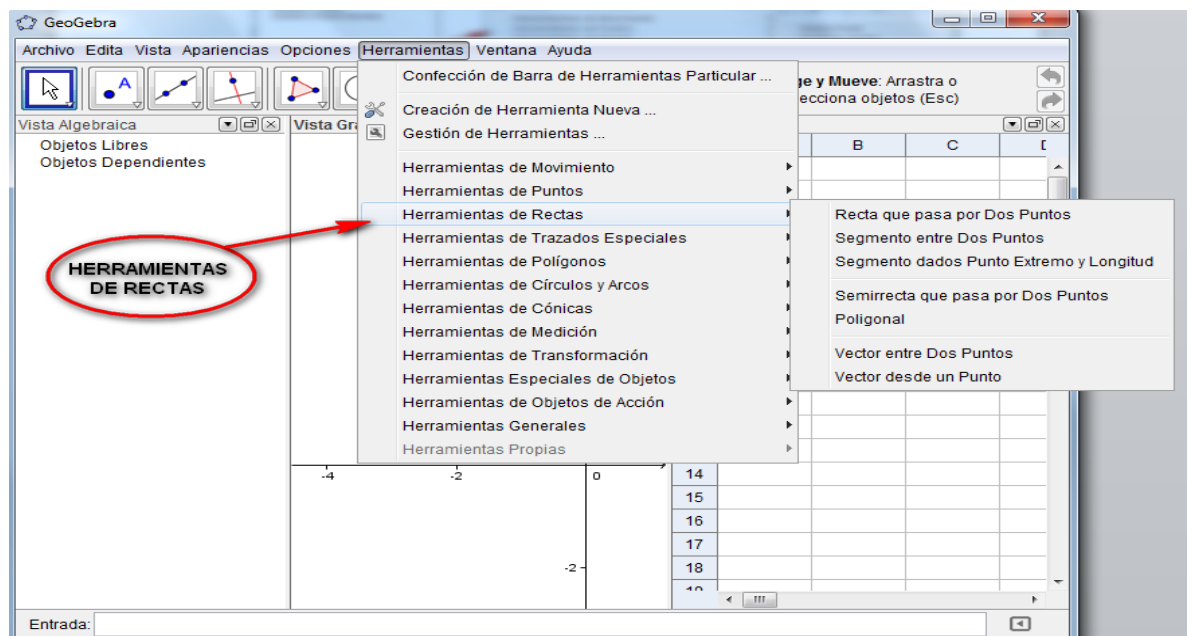


Figura 40: Herramientas de rectas.

- La opción Herramientas de Trazados Especiales, proporciona una serie de opciones de trazos como Rectas Perpendiculares, Paralelas, Tangentes, etc.

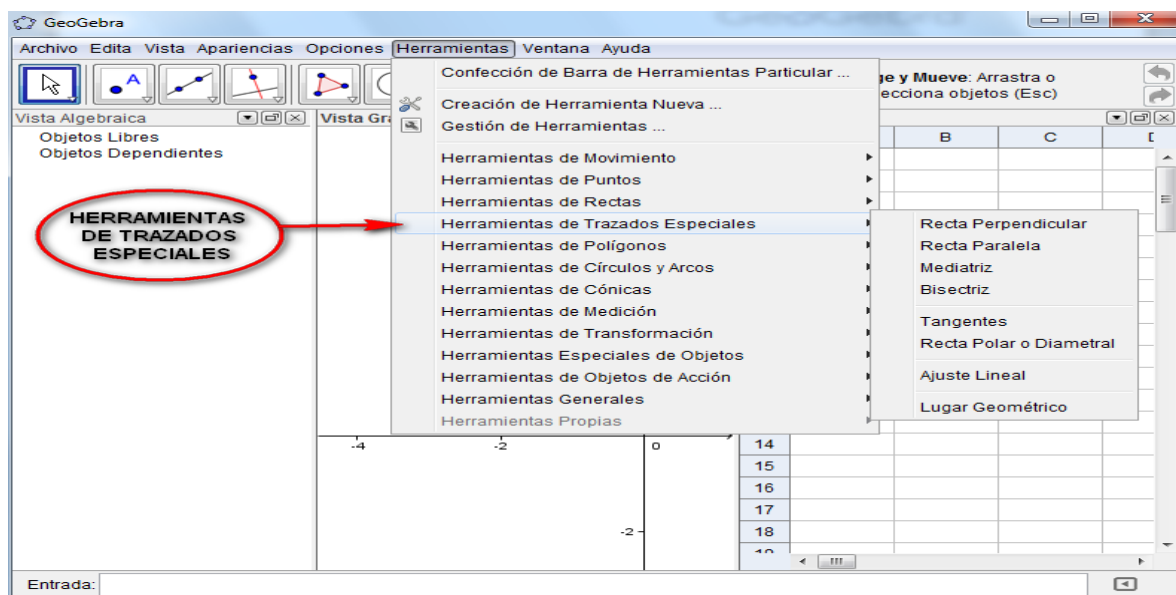


Figura 41: Herramienta de trazados especiales.

- En el Menú Herramientas también se encuentra la opción de Herramientas de Polígonos, la cual posee las opciones: Polígono, Polígono Regular, Polígono Rígido y Polígono Vectorial.

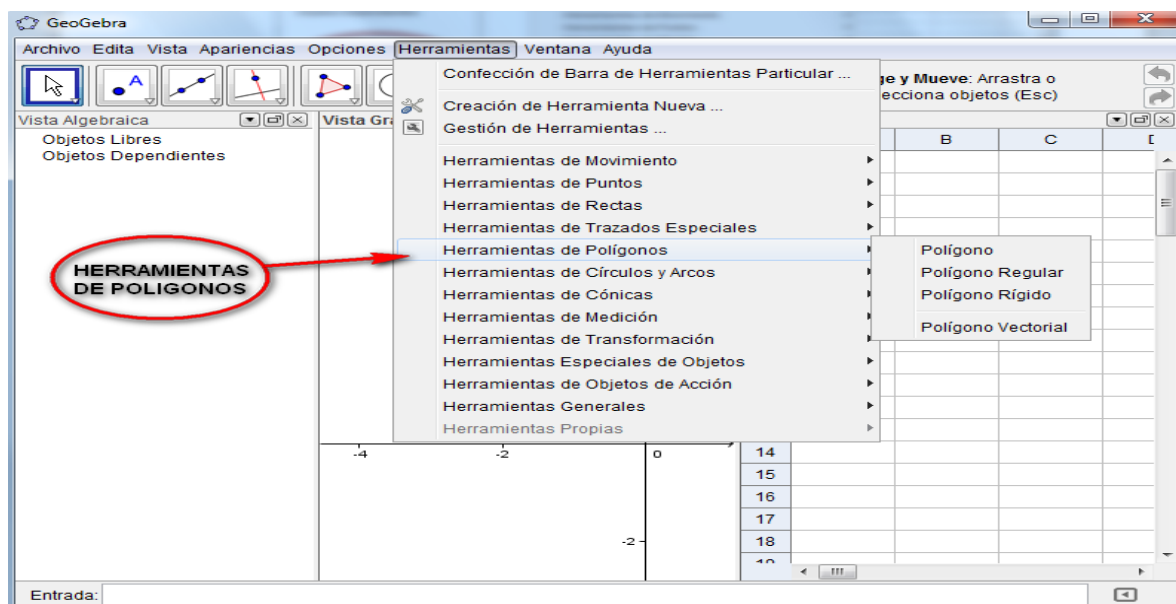


Figura 42: Herramientas de polígono.

- La opción Herramientas de Círculos y Arcos, brinda diferentes opciones para la creación de círculos y sectores circulares.



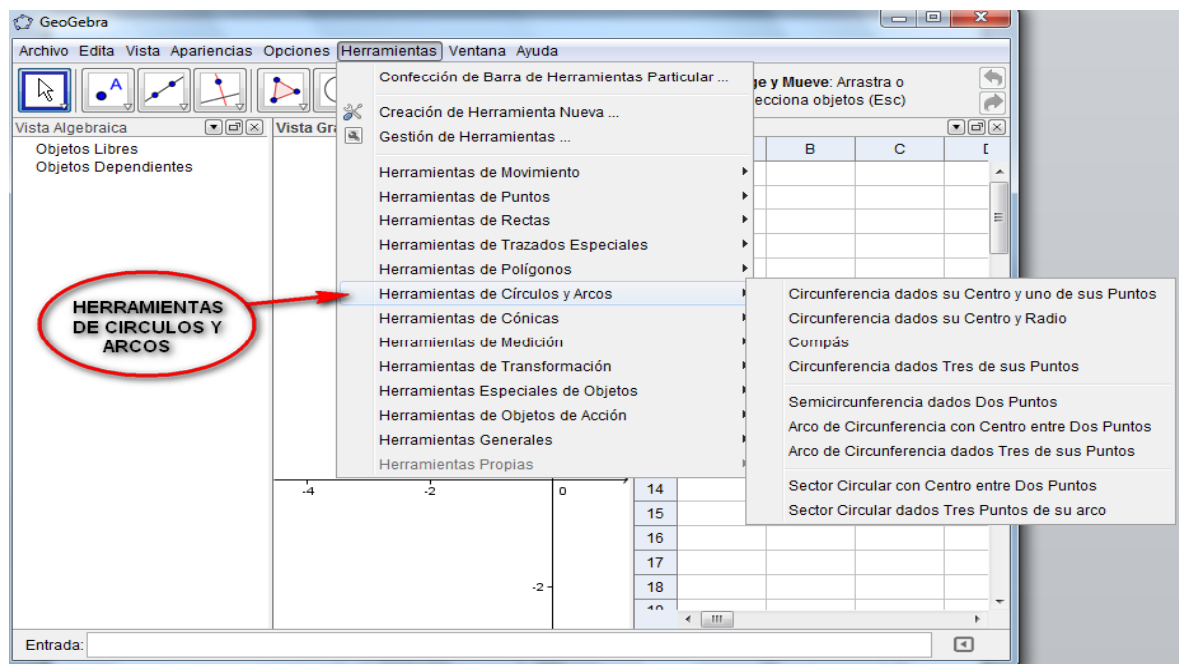


Figura 43: Herramientas de Círculos y Arcos.

- Las Herramientas de Cónicas, permiten la creación de elipses, hipérbolas y parábolas en diferentes circunstancias.

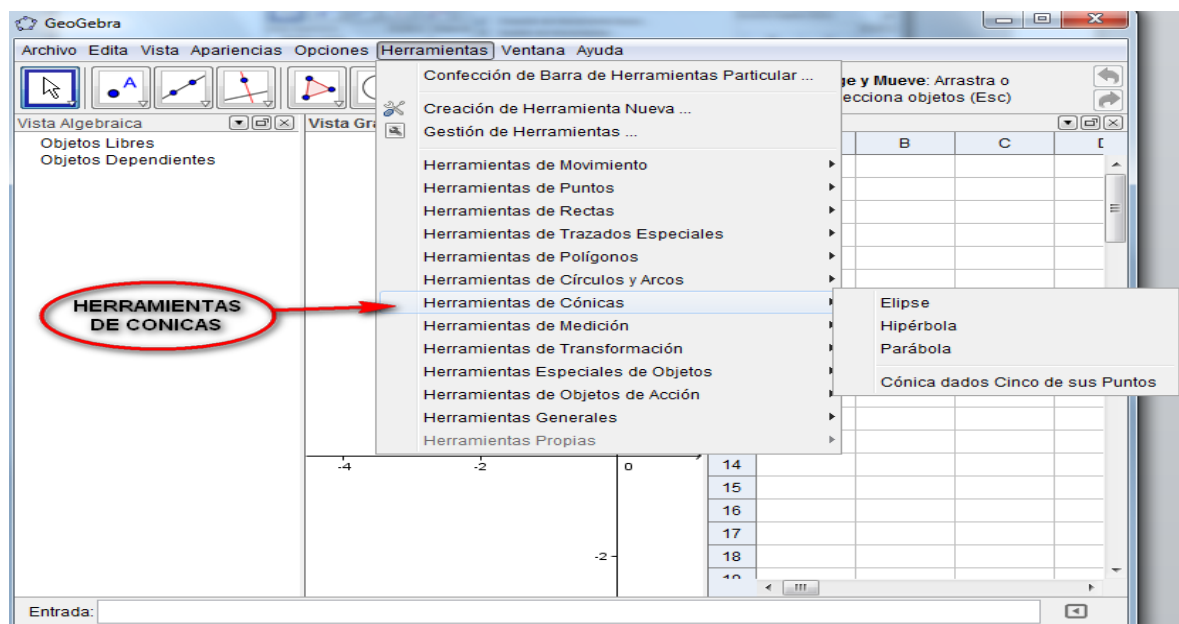


Figura 44: Herramientas de Cónicas.

- Las Herramientas de Medición, permite medir ángulos, Áreas, Pendientes, y Distancia o Longitud.

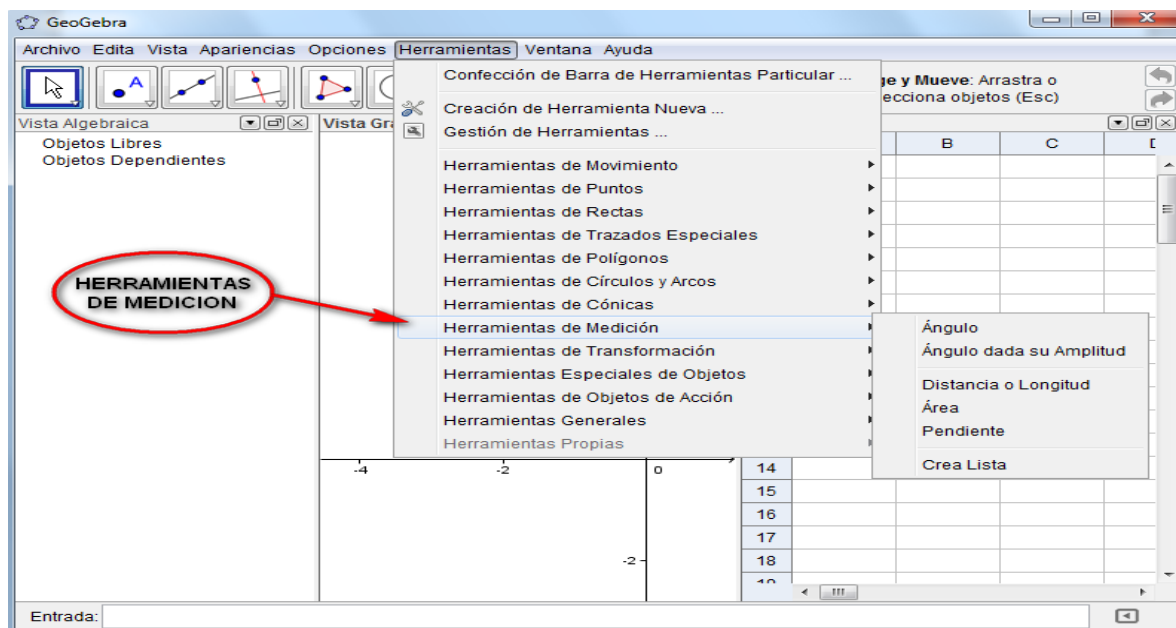


Figura 45: Herramienta de medición.

- Las Herramientas de Transformación brindan una serie de alternativas para reflejar una mejor solución de los problemas.

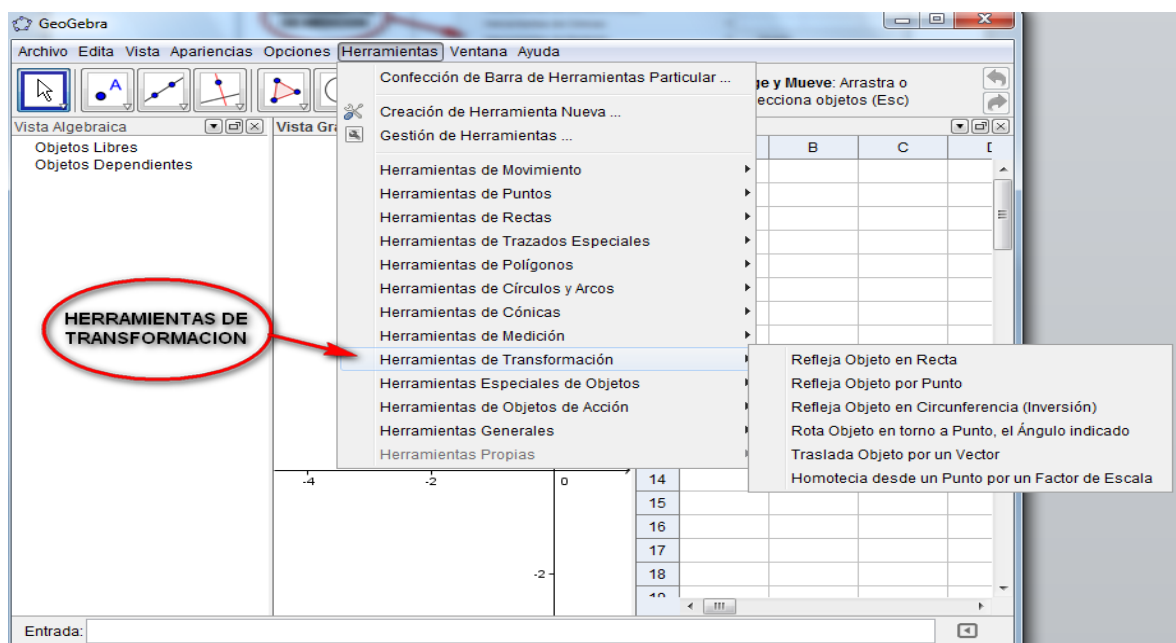


Figura 46: Herramientas de transformación.

- Las Herramientas Especiales de Objetos como por ejemplo: Insertar texto, Insertar Imagen, Lapicero, etc.



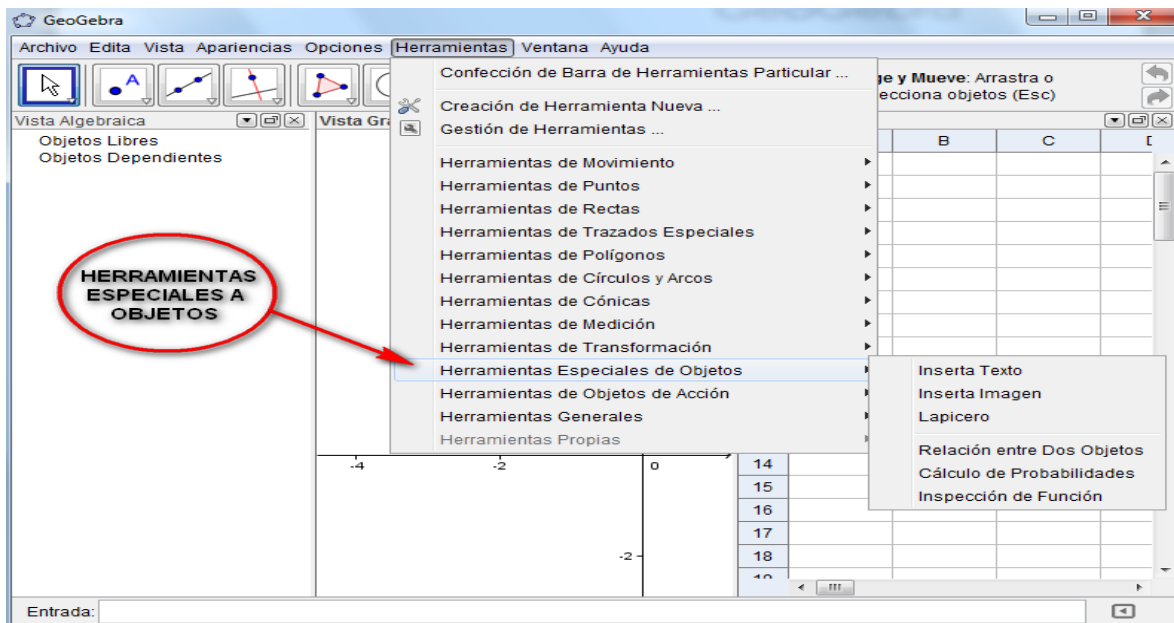


Figura 47: Herramientas especiales a objetos

- La figura 48, muestra la ubicación la opción de Herramientas de Objetos de Acción, con los que se puede crear Deslizadores, Insertar Botón, Casilla de Entrada y de Control.

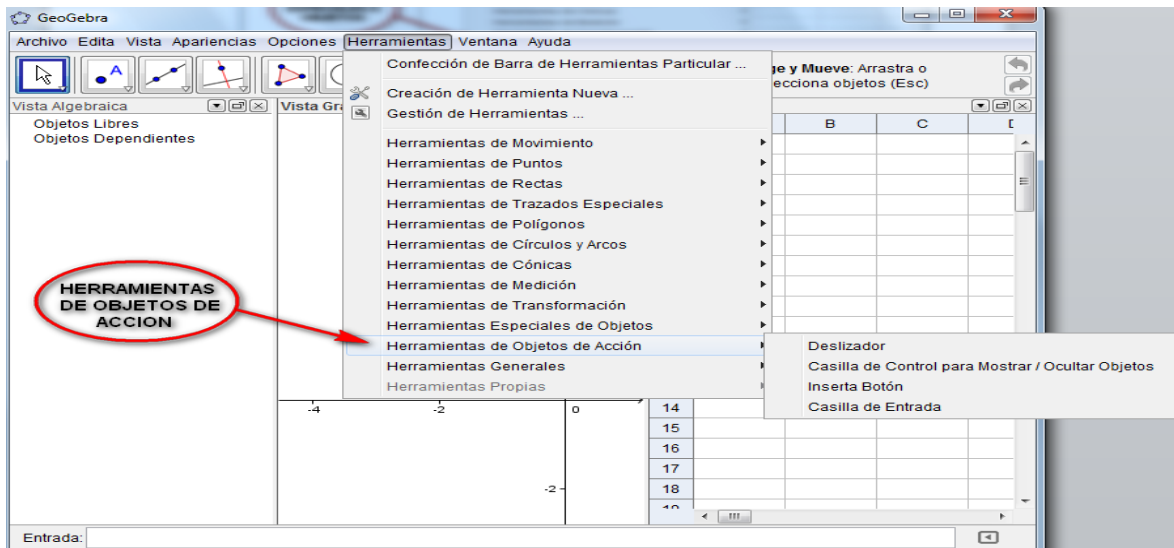


Figura 48: Herramientas de objetos de acción.

- La figura, muestra que en el menú Herramientas se encuentra la opción de Herramientas Generales la cual posee aplicaciones como Desplaza Vista Gráfica, Zoom de Acercamiento y de Alejamiento entre otras.

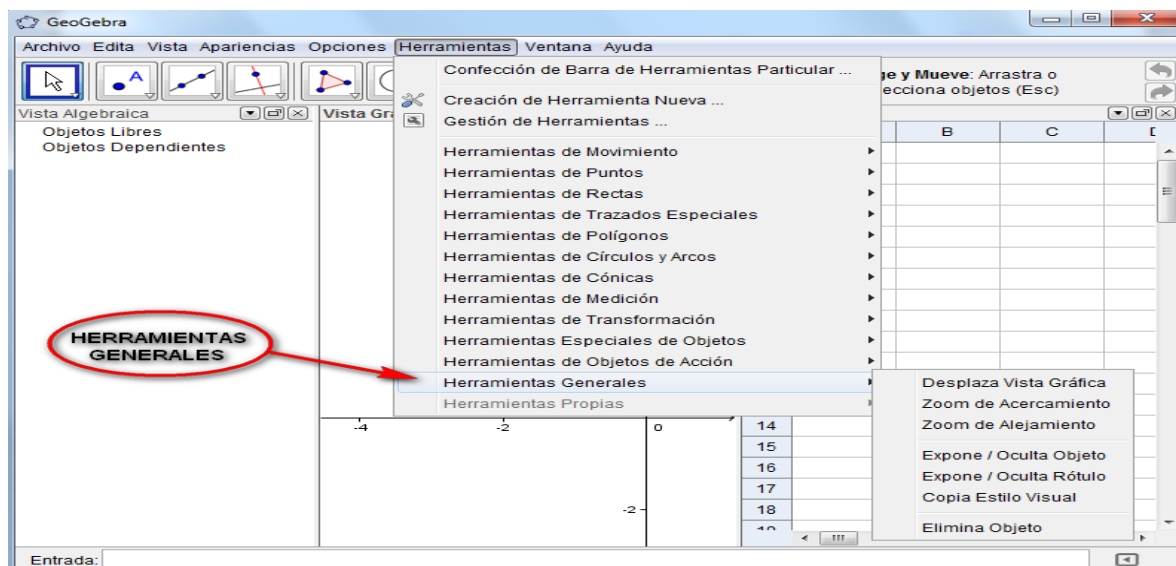


Figura 49: Herramientas Generales.

- En la figura 50, se observa el Menú Ventana que permite colocar una Nueva Ventana.

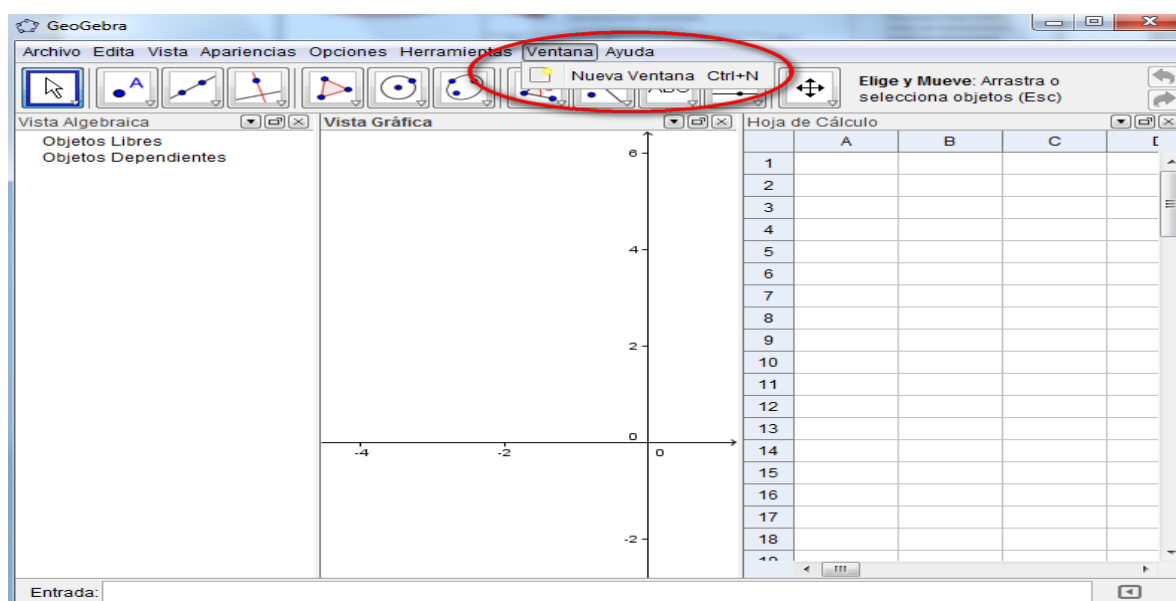


Figura 50: Menú Ventana.

- En el menú Ayuda se puede realizar consultas en caso que se tenga dificultad para realizar una acción o apoyarse para resolver algún problema.

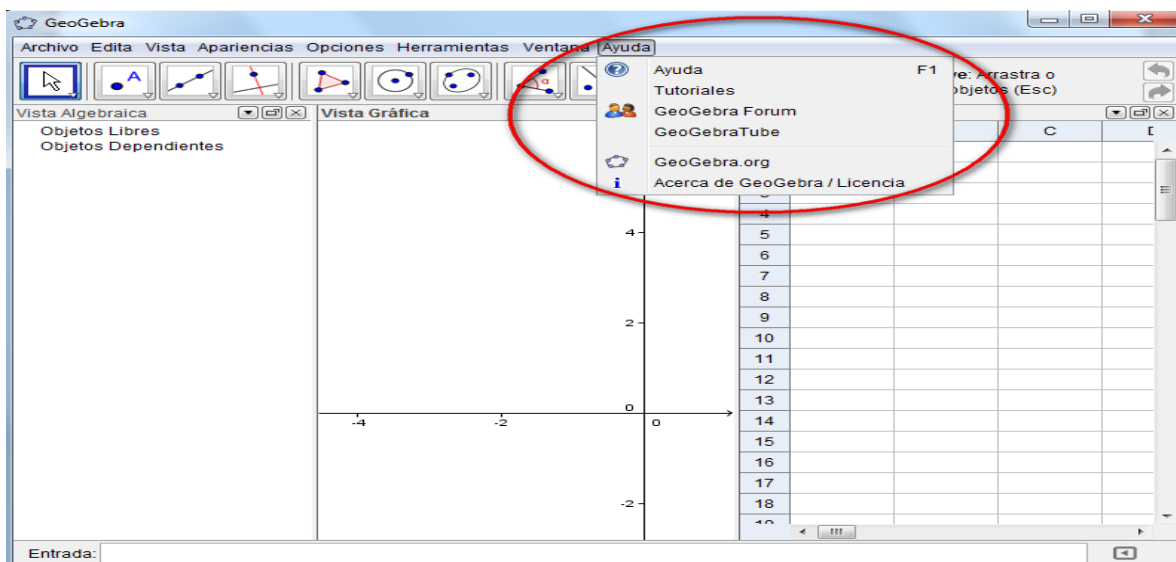


Figura 51: Menú Ayuda

### Barra de entrada

- En esta figura, se puede observar la ayuda de barra de entrada que permite digitar Comandos Especiales que se necesitan en: relaciones, funciones, ecuaciones, desigualdades o polinomios en general.

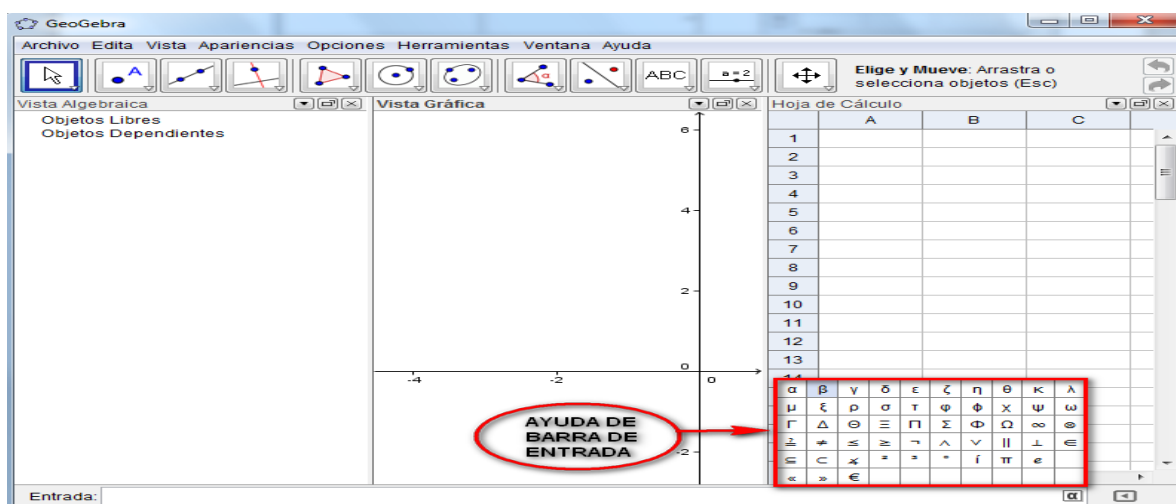


Figura 52: Ayuda a Barra de entrada.

- La figura siguiente muestra otra alternativa de ayuda para la barra de entrada, en la cual se pueden encontrar todas las funciones matemáticas ya clasificadas por grupos.

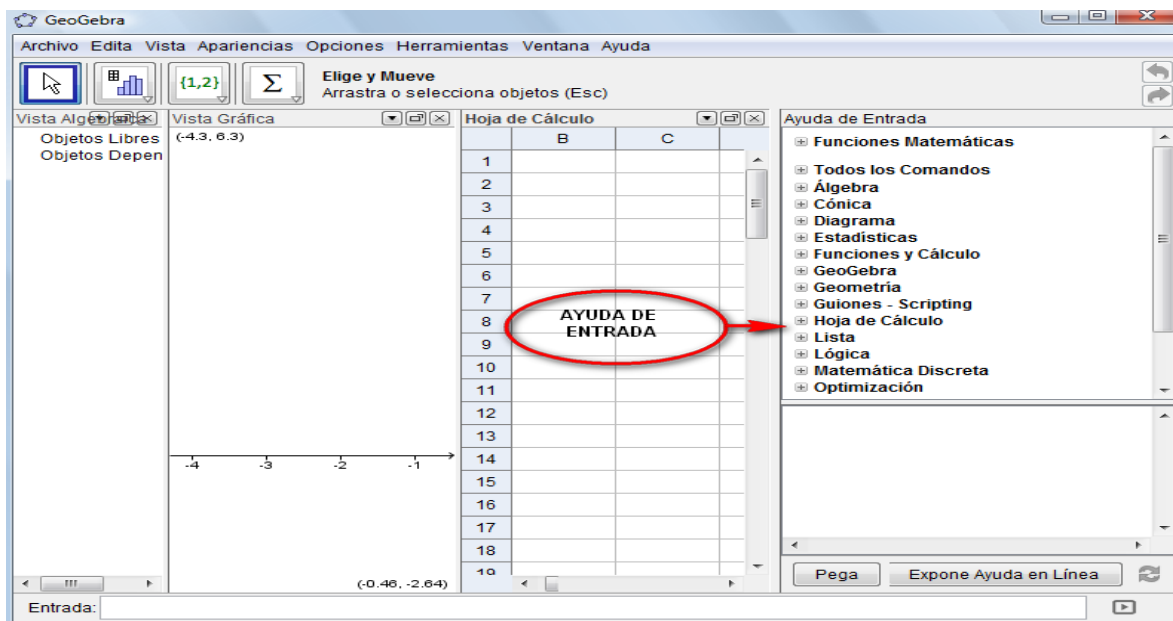


Figura 53: Ayuda a Barra de entrada.

# MÓDULO II

## REPRESENTACIONES

## GEOMÉTRICAS

## MÓDULO II

### Introducción

---

En el módulo II “**REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS**” se trabajará con la Vista Algebraica y la Vista Gráfica, con el fin de representar gráficamente puntos, vectores, polígonos, etc. y al mismo tiempo analizar la representación algebraica que GeoGebra presenta en cada caso, analizando los elementos paralelos que presenta de manera automática como área, ángulos, vértices, perímetro, etc.

Para realizar las actividades de este módulo deberá revisar el material del módulo II: recursos multimedia, plan del módulo, manual; así como también la descripción sobre la barra de herramientas plasmada en el material multimedia del módulo I.

### Objetivos

---

#### Objetivo General

Conocer las diferentes herramientas que posee GeoGebra para realizar representaciones geométricas.

#### Objetivos Específicos

- Describir las herramientas de GeoGebra para representar puntos
- Describir el uso de herramientas para la creación y representación de vectores
- Crear polígonos regulares e irregulares de diferentes números de lados
- Graficar rectas haciendo uso de las herramientas de GeoGebra

## Tema 1: Punto

- El punto es una figura geométrica que carece de dimensiones; es decir no tiene longitud, área ni volumen.



*Figura 54: Representación gráfica de un punto*

- Un punto describe una posición en el espacio, determinada respecto de un sistema de coordenadas preestablecido. En el sistema de coordenadas cartesianas, se determina mediante las distancias ortogonales a los ejes principales, que se indican con dos letras o números:  $(x, y)$  en el plano por ejemplo el dúo  $(2,5)$  conocido como par ordenado son las coordenadas del punto que se muestra en la siguiente figura.



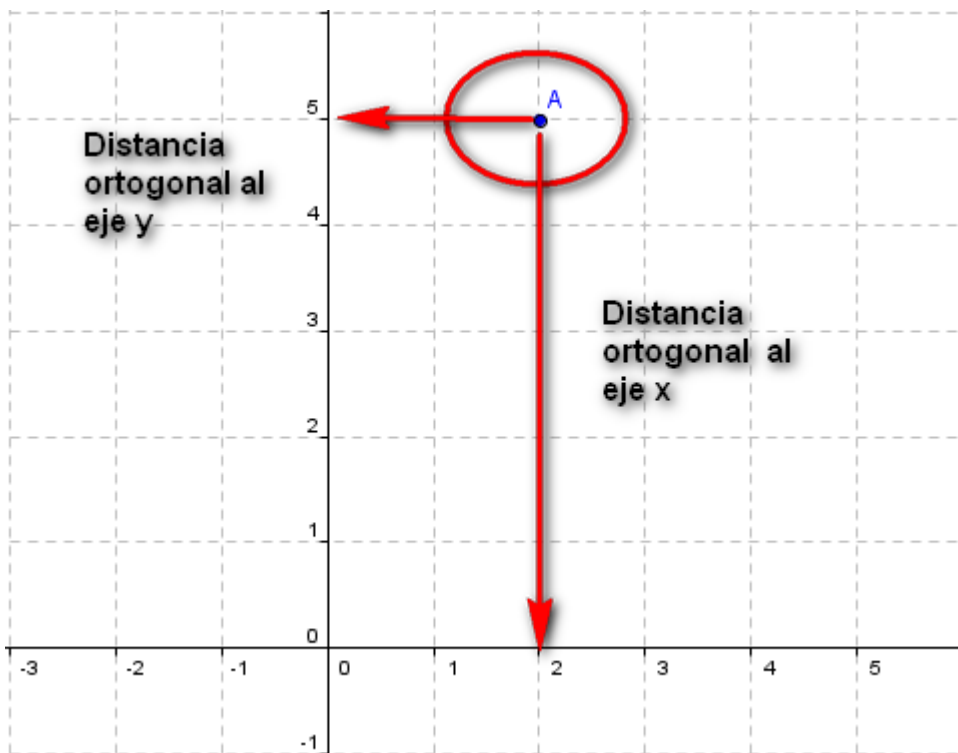


Figura 55: Coordenadas de un punto

- En coordenadas polares, un punto se representa tomando en cuenta la distancia desde el origen y el ángulo medido a partir del eje x positivo, en ese sentido el punto con coordenadas  $(3; 90^\circ)$  se encuentra representado en la figura 2, por tanto decimos que un punto en coordenadas polares queda determinado mediante su distancia al centro y la medida angular respecto del eje de referencia:  $(r, \theta)$ .

Para representarlo se digita en la Barra de Entrada los datos tal como se muestran  $(3; 90^\circ)$  y presiona *Enter* y tendrá graficado el punto (observe el video sobre representación gráfica y algebraica de puntos).

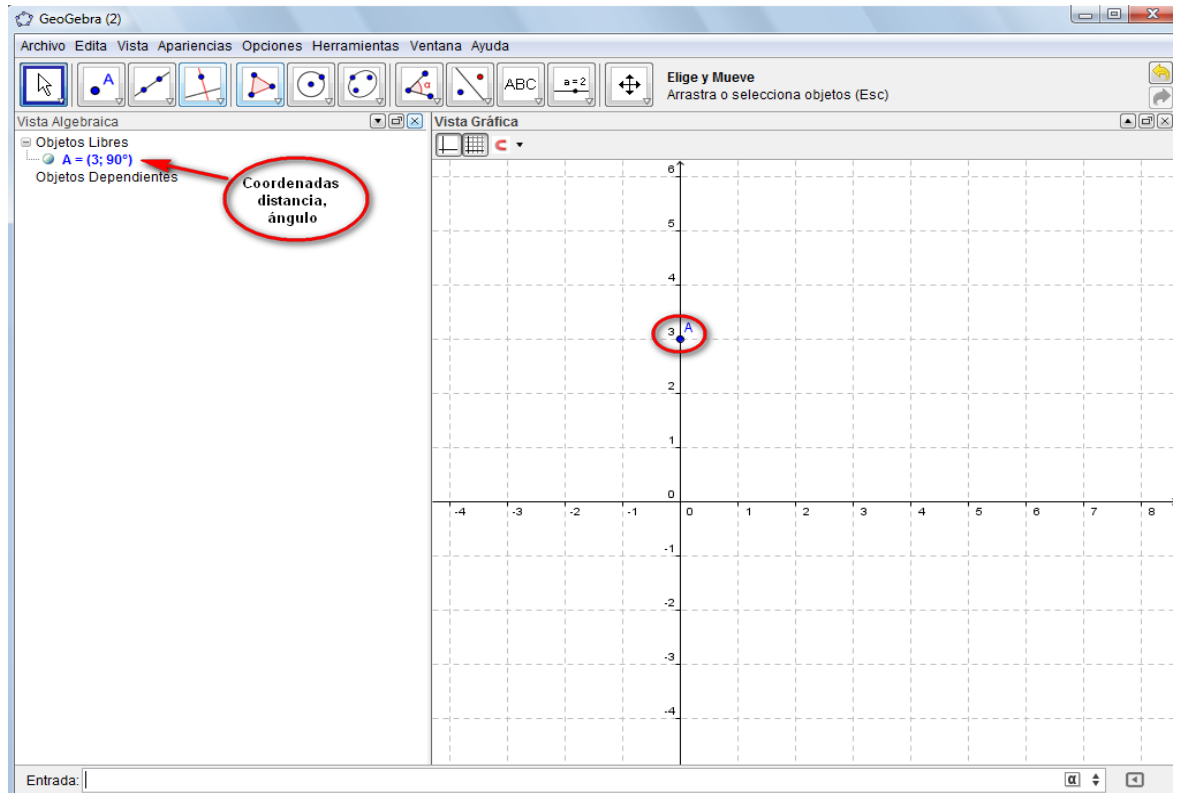


Figura 56: Coordenadas Polares de un punto

- Según la ubicación de los puntos se pueden clasificar en:
  - a) Colineales son aquellos contenidos en una recta, no importando cuantos puntos sean mientras estén alineados. Observa la figura 4 ahí se muestran los puntos desde la A hasta la H, todos son colineales porque se pueden unir por una línea recta.

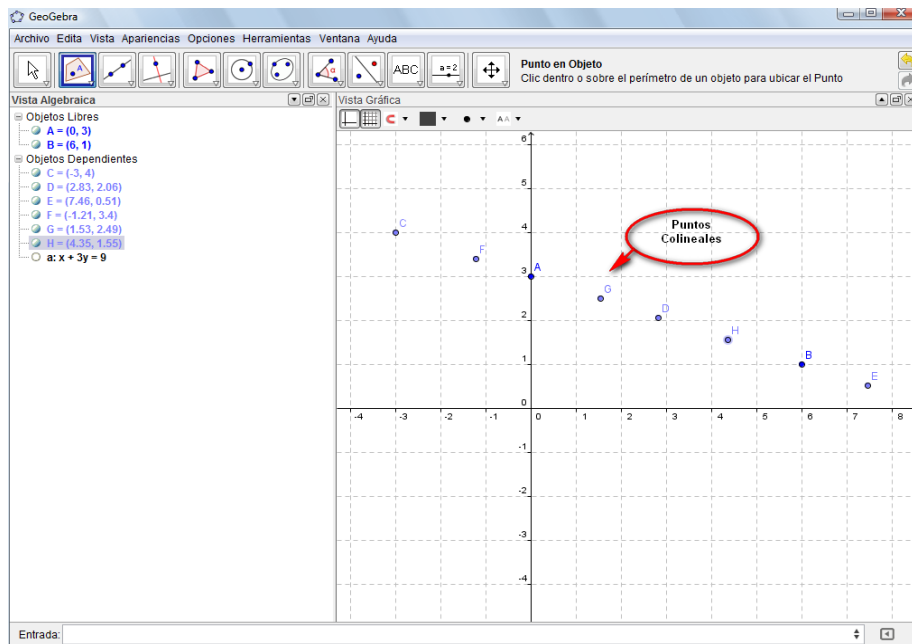


Figura 57: Puntos Colineales

- b) Coplanarios a aquellos que están contenidos en un mismo plano. Observa el ejemplo que se muestra en la figura 5 los puntos A, B y C son coplanares.

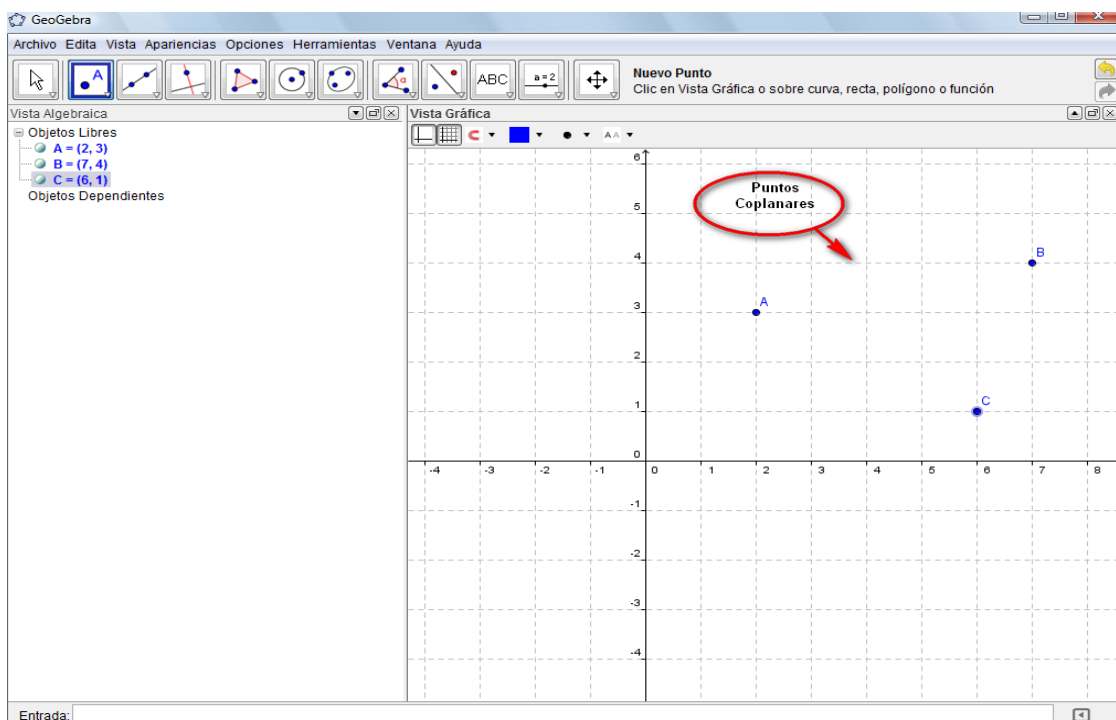


Figura 58: Puntos Coplanares

**Ejemplo1:** Dadas las coordenadas cartesianas del punto  $A(-2,5)$  ubique los puntos en el plano

### Solución:

La representación gráfica de un par ordenado en el sistema de coordenadas cartesianas en GeoGebra se puede hacer de dos formas:

1. Digitando las coordenadas en la barra de entrada tal como lo muestra la siguiente figura.

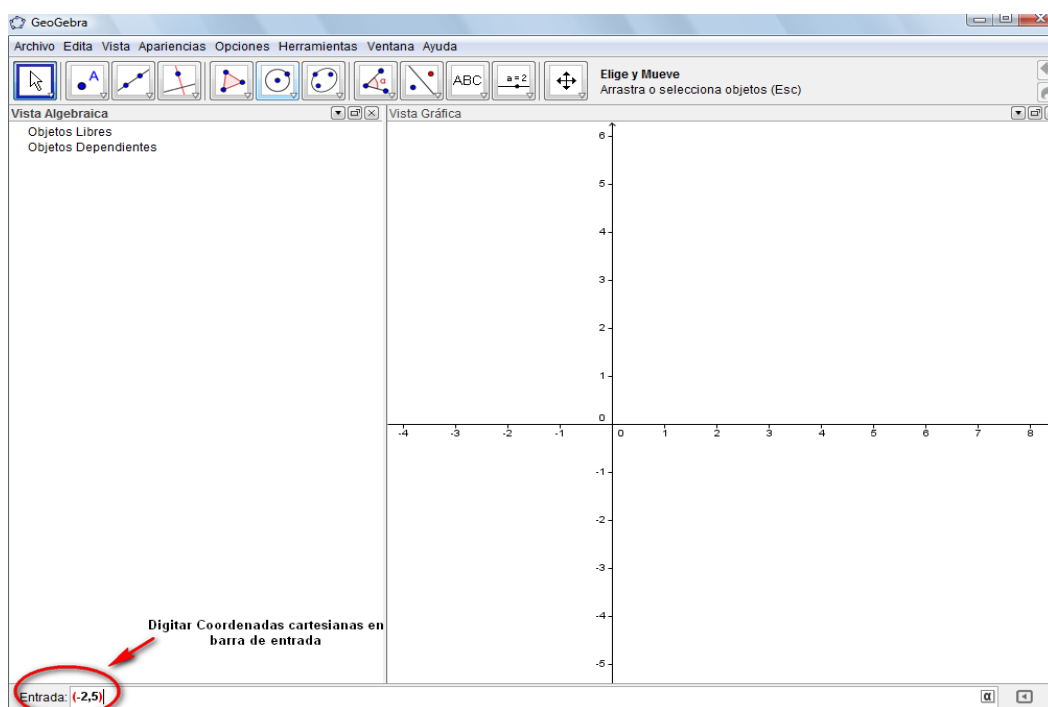
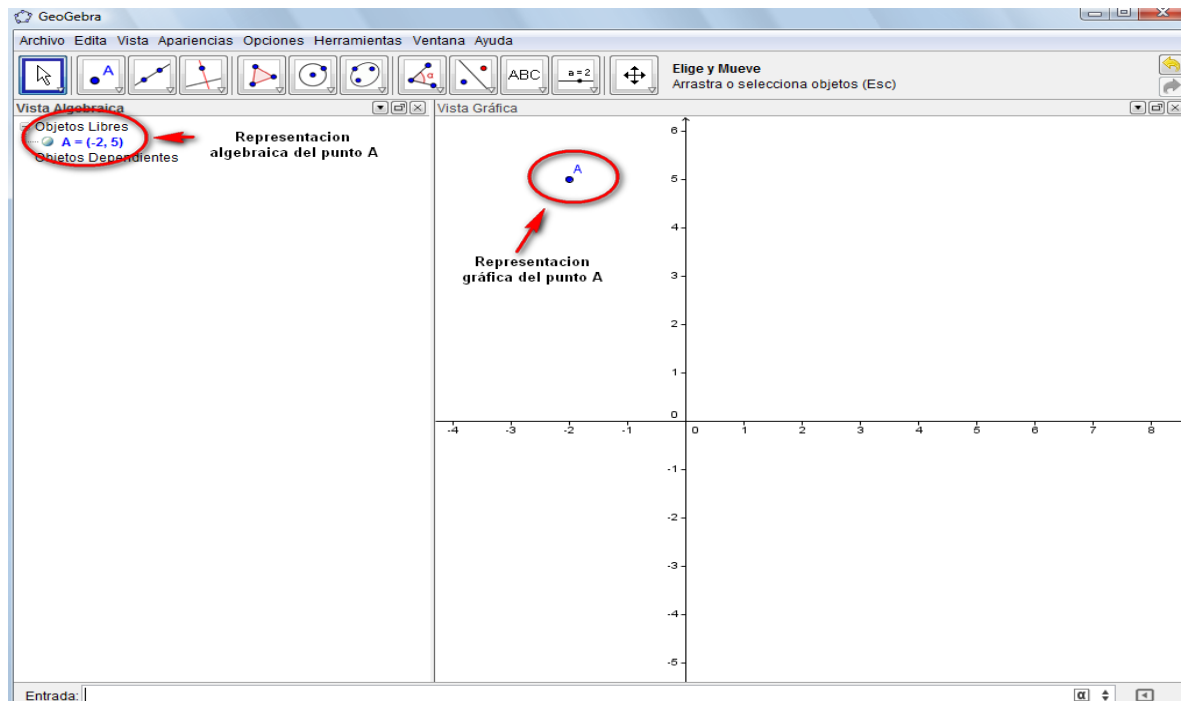


Figura 59: Entrada de coordenadas de puntos

- Una vez se hayan digitado las coordenadas en la Barra de Entrada se presiona la tecla Enter y aparecerá en la Vista Álgebraica la representación algebraica (par ordenado) y en la Vista Gráfica la representación del punto.



*Figura 60: Representación gráfica y algebraica del punto*

- Si se activa la cuadrícula en la Vista Grafica entonces se puede visualizar con mayor facilidad las coordenadas del punto, tal como lo muestra la figura 8.

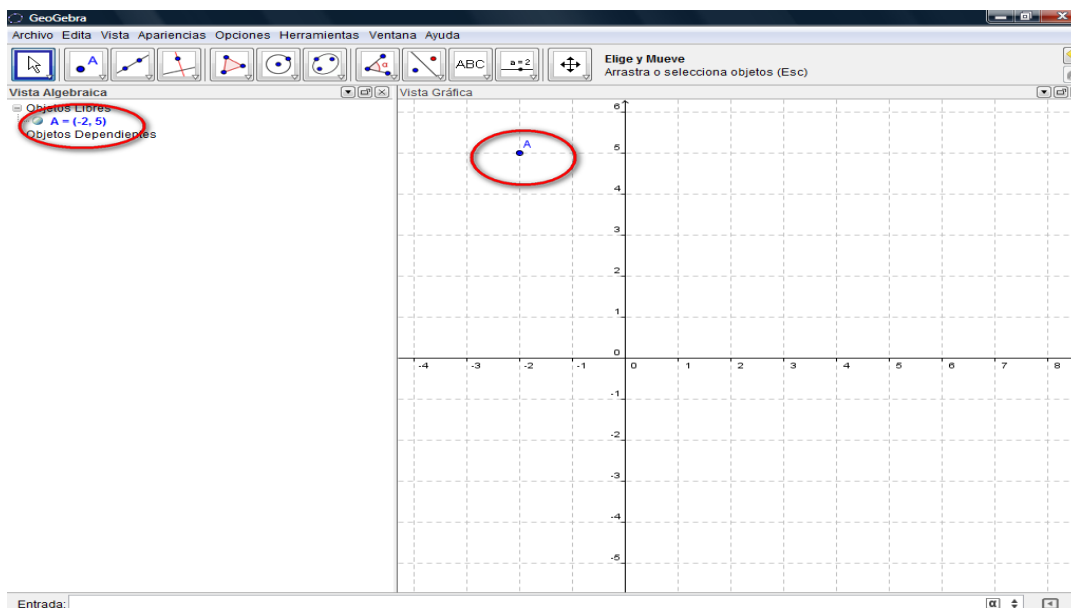



Figura 61: Representación del punto

2. Activando la cuadrícula y dando clic en la opción Nuevo Punto la caja de

herramientas  de la Barra de Herramientas; luego ubicar el puntero y dar clic en las coordenadas indicadas tal como lo muestra la figura siguiente.

- Si se toma el par ordenado  $(-2,5)$  se tiene:

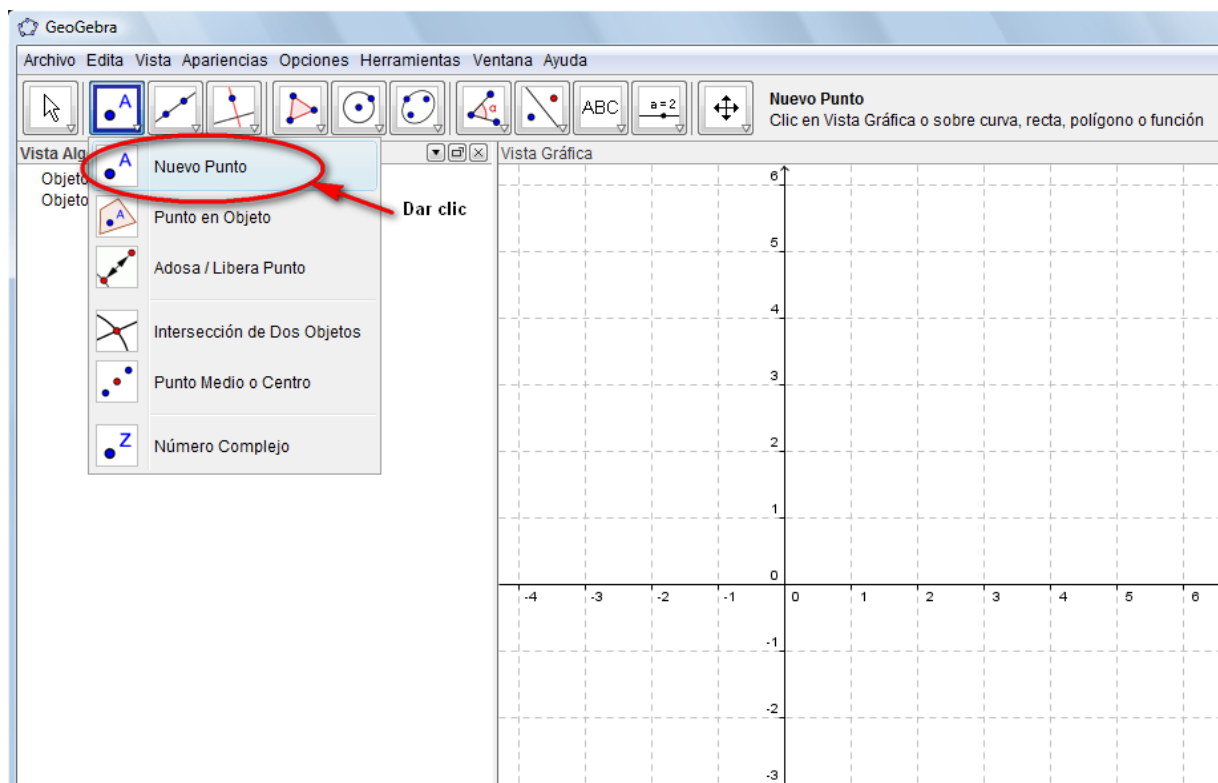


Figura 62: Representación gráfica del punto<sub>3</sub>



- Al dar clic queda graficado el punto de la siguiente manera

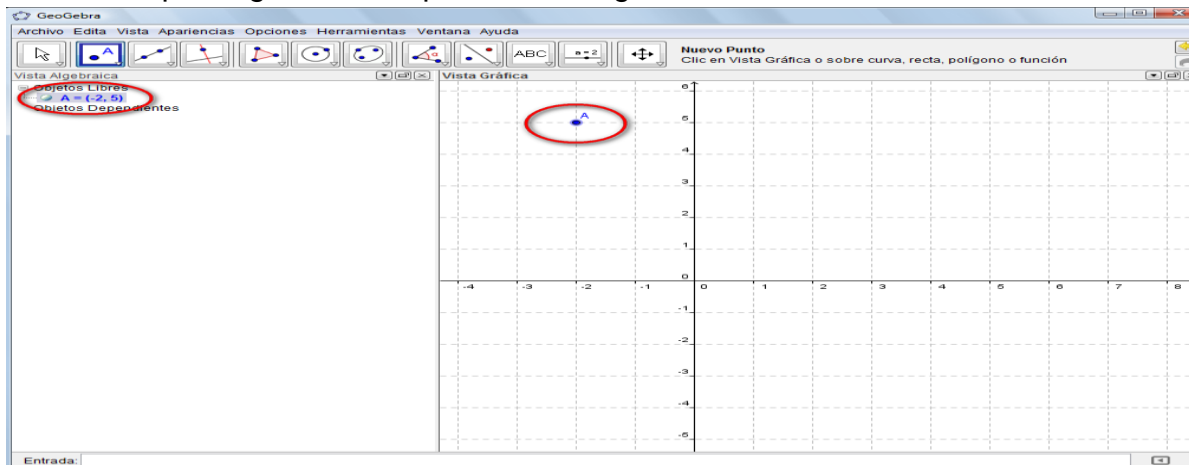



Figura 63: Representación gráfica<sub>4</sub>

### Punto en un objeto

- Cuando ya se tiene un objeto (polígono y/o gráfico de cualquier función) y sobre él se desea colocar un punto, entonces se selecciona la opción

punto en objeto del botón  de la Barra de Herramientas, tal como se muestra en la figura.

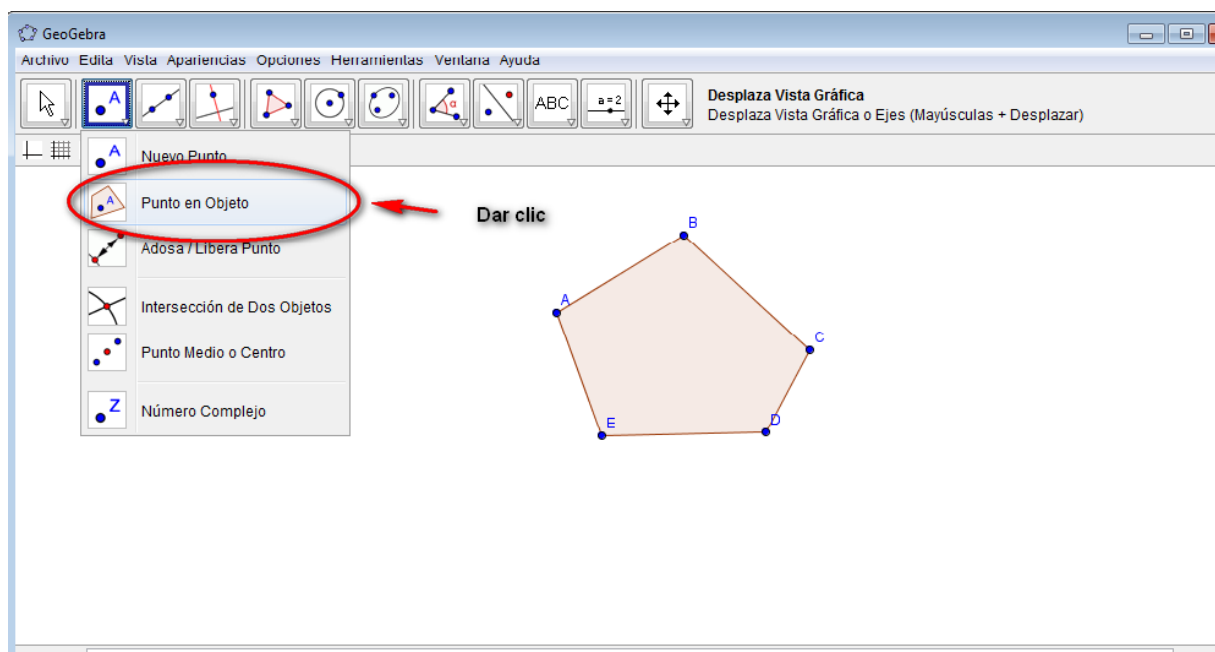


Figura 64: Punto en un objeto

- Luego de haber dado clic, seleccionar el lugar del objeto en que se desea colocar el punto podría ser dentro del objeto (ver figura 12) o sobre el perímetro (ver figura 13) según se necesite o desee.

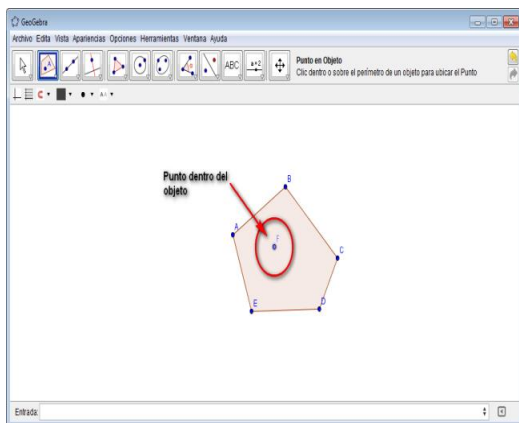


Figura 65

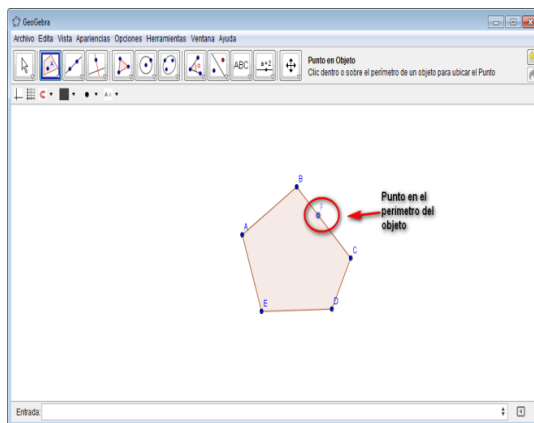



Figura 66

### Adosa/libera punto

- Cuando se tiene un objeto y un punto y se desean adosar o juntar, entonces se selecciona la opción, Adosa/libera de la caja de herramientas  de la Barra de Herramientas dar clic sobre ella; luego se selecciona el punto y el perímetro o el interior del objeto con el cual se desea adosar o caso contrario liberar. Esta herramienta se activa dando clic en la opción que muestra la figura (ver video sobre herramientas de punto).

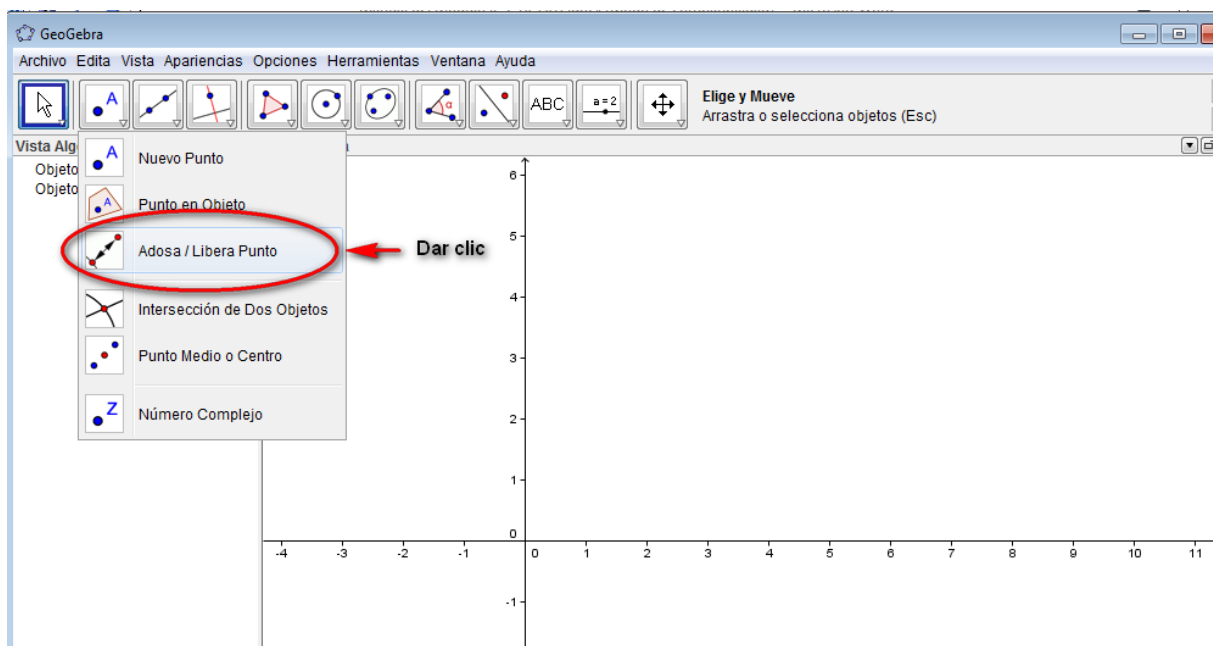



Figura 67: Adosar un punto a un objeto

### Punto de intersección de dos objetos

En caso que se tenga dos o más objetos (polígonos, gráficas, o una gráfica y el plano) y se desea determinar las coordenadas del punto de intersección entre ellos, entonces se hace uso de la opción Intersección de Dos Objetos de

la caja de herramientas  de la Barra de Herramientas que se activa dando clic donde muestra la figura 15.

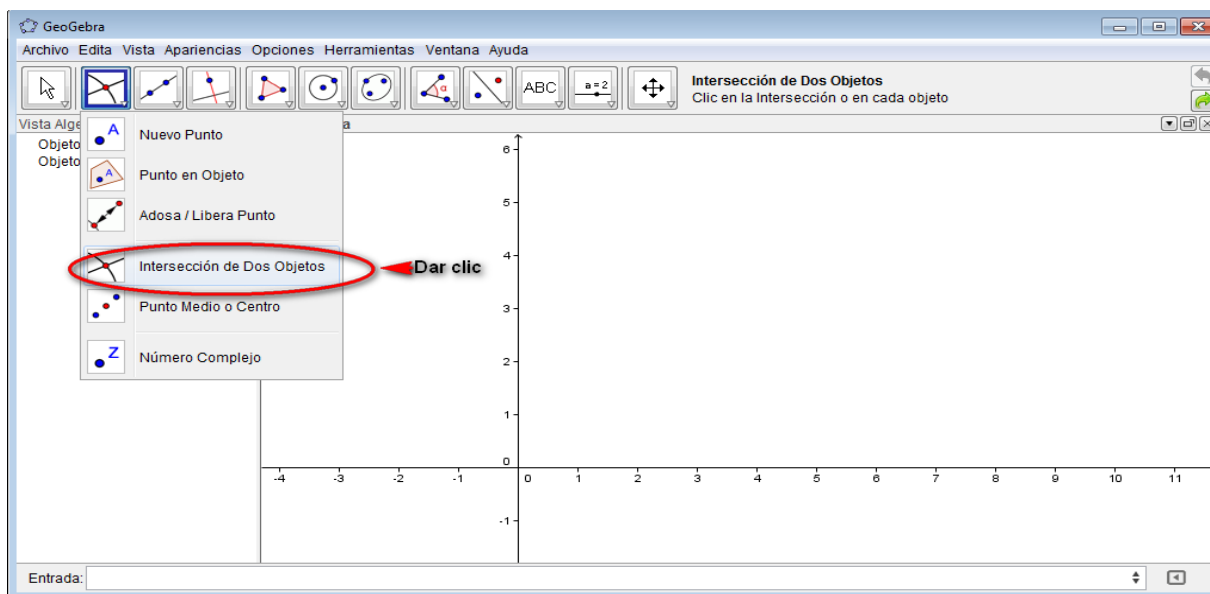


Figura 68: Intersección de dos objetos

**Ejemplo2:** Determinar el punto de intersección entre la recta que pasa por los puntos  $(-1,3)$  y  $(3,5)$  y el sistema de coordenadas cartesianas  $XY$ .

### Solución:

- i. Digitar los pares ordenados en la Barra de Entrada y aparecerán los puntos en la Vista Gráfica y los pares ordenados en la Vista Algebraica, tal como se muestra en la figura 16.

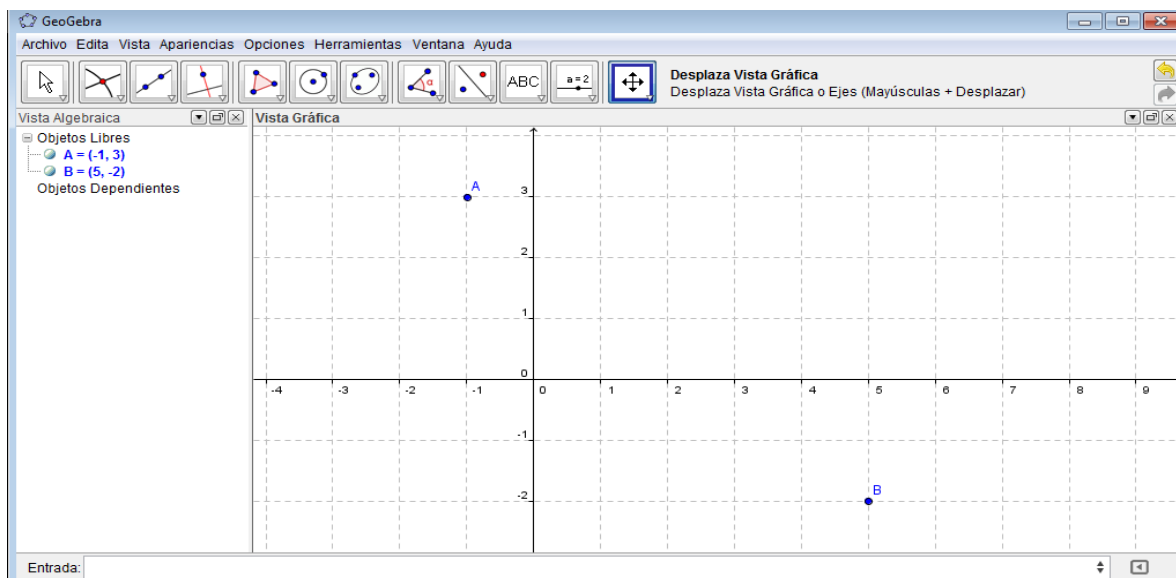


Figura 69: Entrada de puntos ejemplo

- Trazar la recta activando la opción Recta que pasa por Dos Puntos de la



caja de herramientas de la Barra de Herramientas, luego dar clic en los puntos y aparecerá la gráfica tal como lo muestra la figura 17.

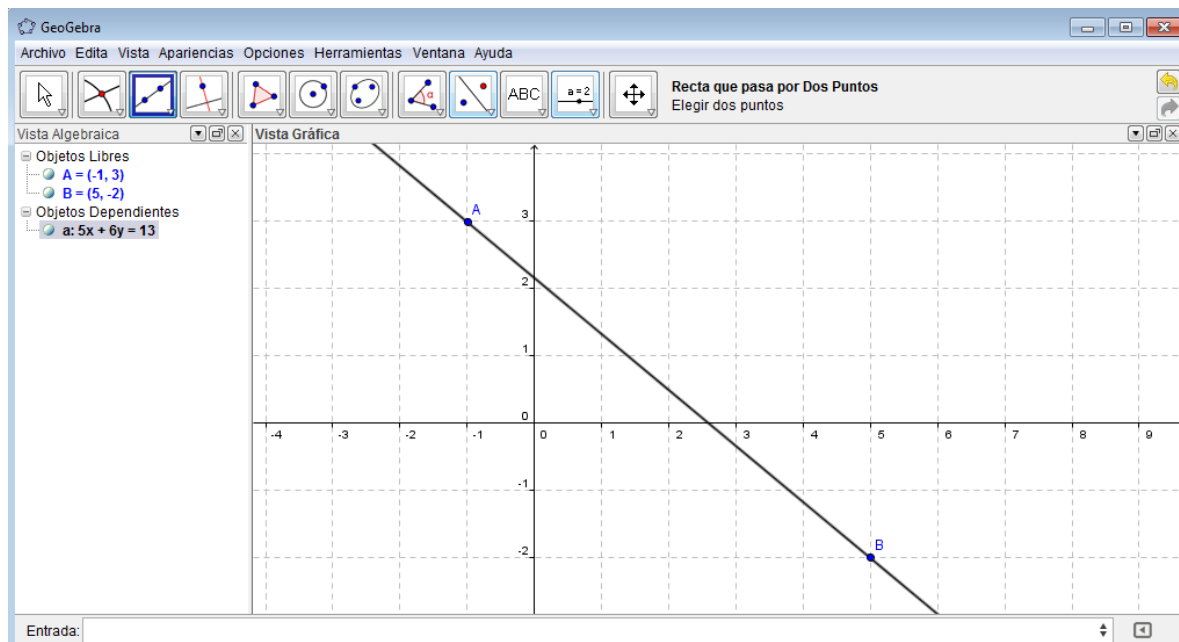


Figura 70: Creación de la recta

- Una vez se halla activado la herramienta Intersección de Dos Objetos, se selecciona cada uno de los objetos dando un clic en cualquier parte de ellos, automáticamente aparecerán marcados los puntos de intersección. Además se podrán visualizar paralelamente los puntos de corte y sus respectivas las coordenadas en la vista algebraica, tal como lo muestra la figura 18.

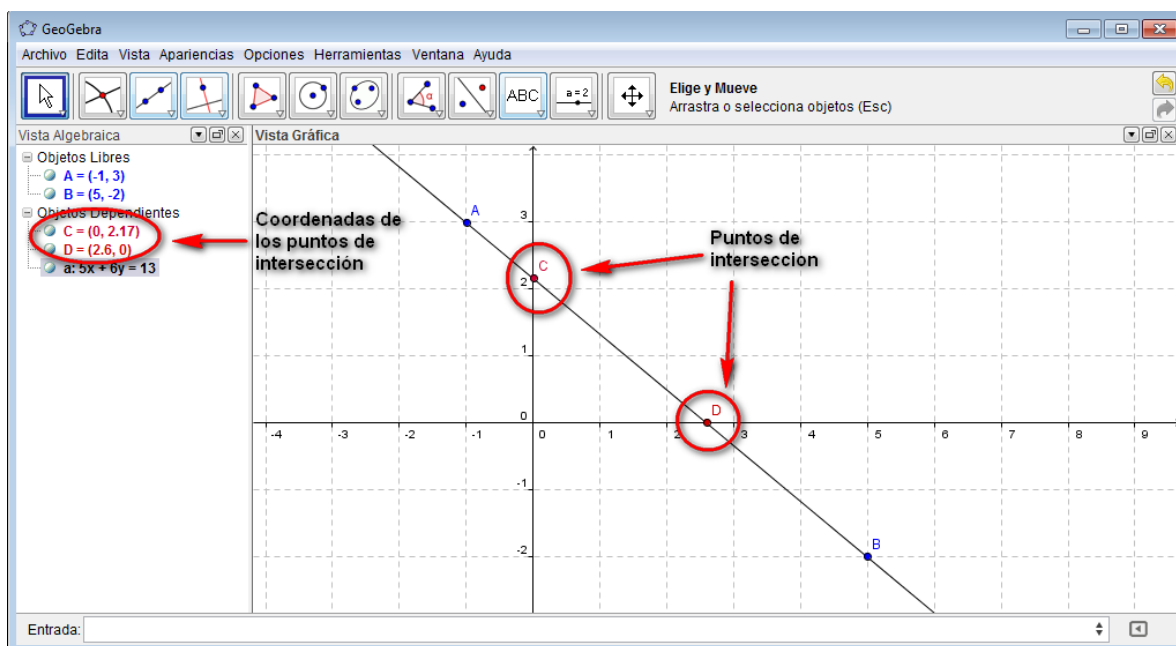


Figura 71: Intersección de dos objetos

## El punto medio

El punto medio es el valor que equidista de dos puntos tomados como referencia; es decir que divide en dos partes iguales, en ese sentido podemos determinar el punto medio de la distancia entre dos puntos dados, el punto medio de un segmento o el punto medio de la distancia de un punto cualquiera de una circunferencia a su radio.

**Ejemplo3:** si se tienen los puntos  $A(2,2)$  y  $B(7,5)$ , tal como se muestran en la figura y se desea determinar el punto medio entre ellos, entonces se realiza el siguiente procedimiento:

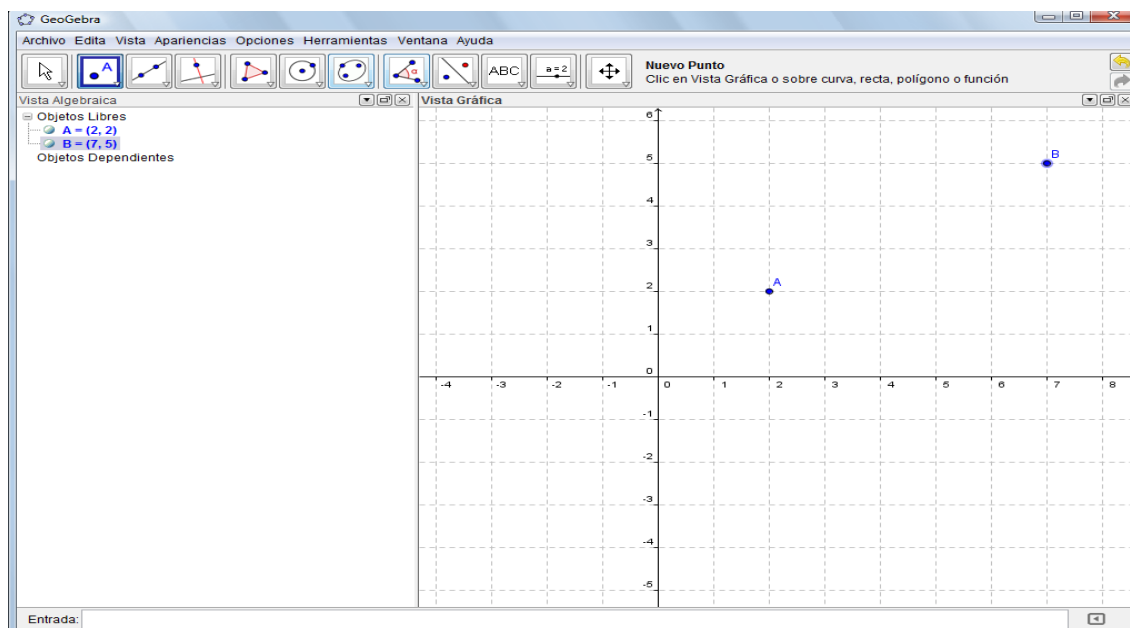


Figura 72: Grafica de los dos puntos  $(2,2)$  y  $(7,5)$

- Se selecciona la opción punto medio de la caja de herramientas de la Barra de Herramientas, tal como se muestra en la figura

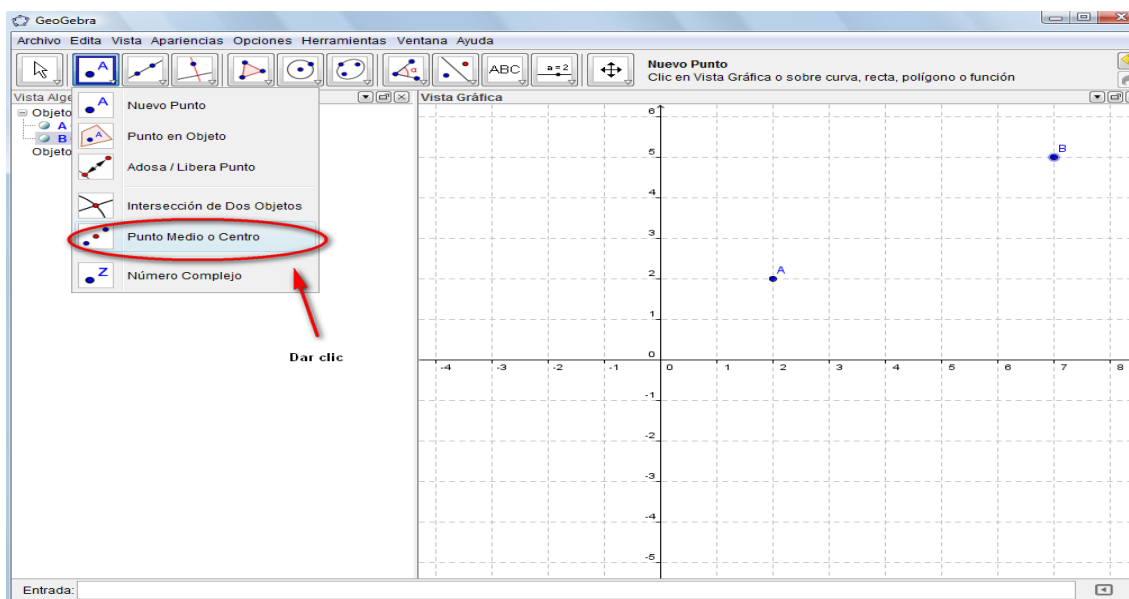


Figura 73: Determinando punto medio entre  $(2,2)$  y  $(7,5)$



- Luego de haber dado clic en la opción, se seleccionan los puntos dados A y B y automáticamente aparecerá el punto medio representado por una letra en la vista grafica y sus respectivas coordenadas en la vista algebraica.

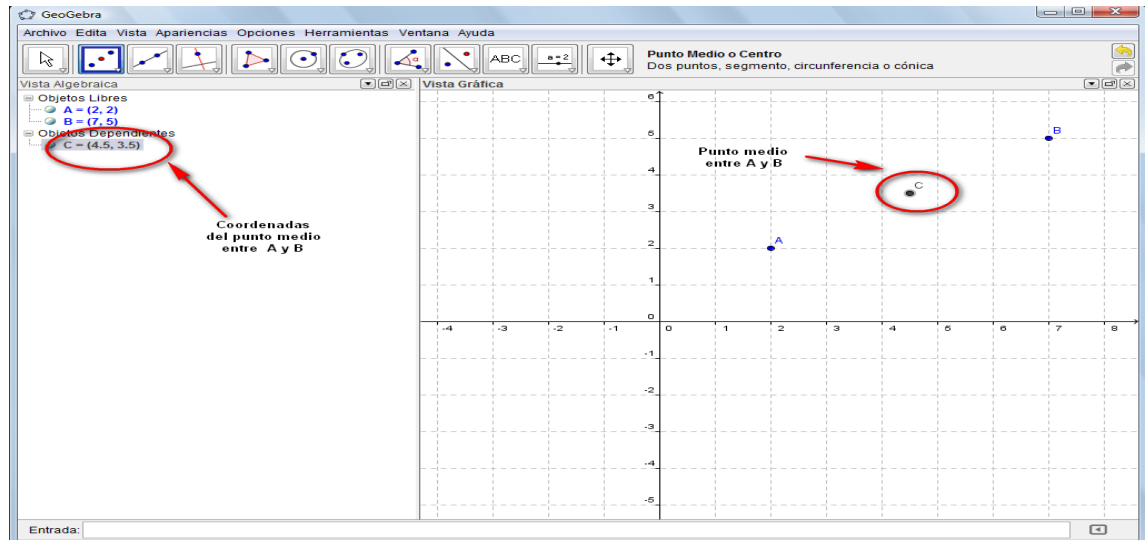


Figura 74; punto medio entre (2,2) y (7,5)

## Tema 2: La línea recta

- **La recta o línea recta**, es una sucesión infinita de puntos que se extiende en una misma dirección, existe en una sola dimensión y contiene infinitos puntos; está compuesta de infinitos segmentos; entendiéndose como segmento el fragmento de línea más corta que une dos puntos. También se describe como la sucesión continua e indefinida de puntos en una sola dimensión, o sea, no posee principio ni fin.

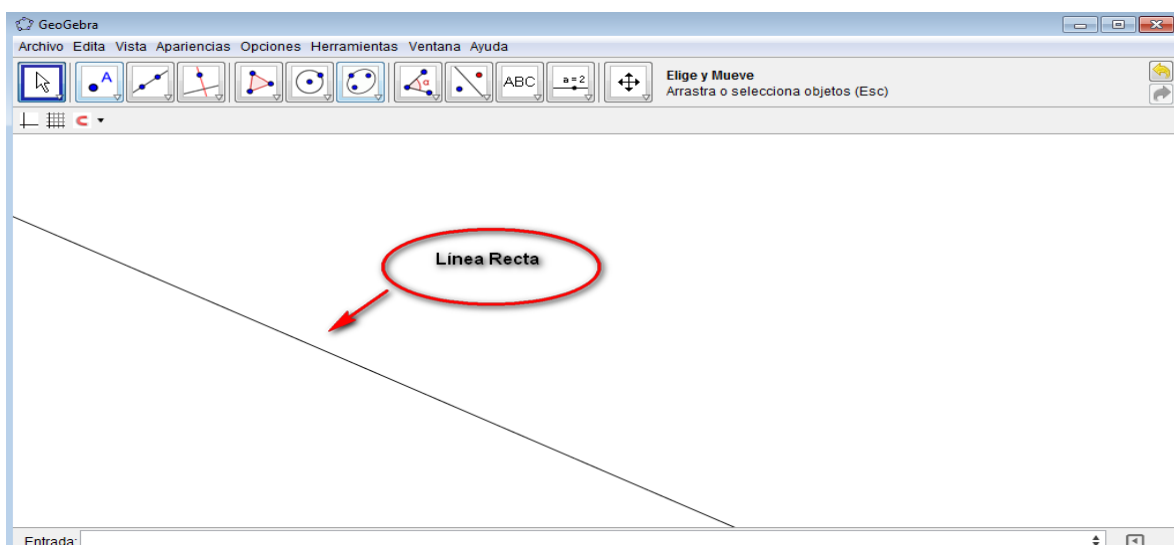


Figura 75: Línea Recta

- La gráfica de una recta en GeoGebra se puede realizar de dos formas: digitando la ecuación en la Barra de Entrada ó digitando los pares ordenados de dos puntos por donde pase.
  - ✓ Para graficar una recta cuando se conoce la ecuación que la representa se digita la ecuación en la Barra de Entrada y se presiona la tecla *Enter*, entonces aparecerá en la Vista Algebraica la ecuación como un objeto libre y el respectivo gráfico en la Vista Gráfica, tal como se muestra en la figura

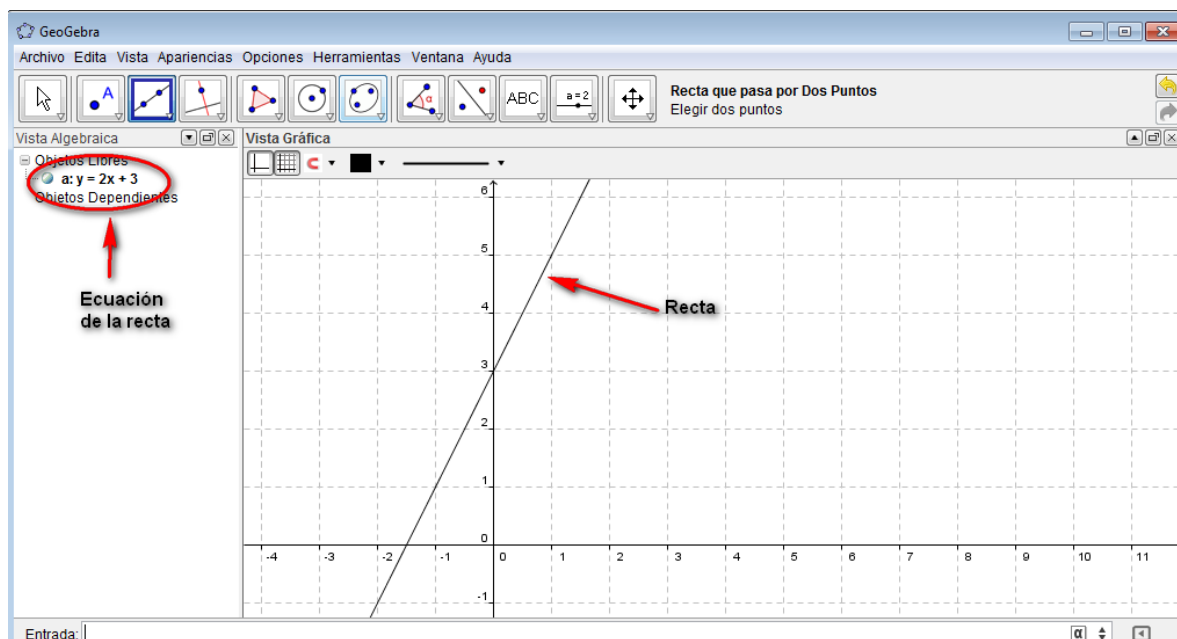


Figura 76: Línea Recta

- ✓ Cuando se conocen dos puntos del plano por donde pasa la recta estos se pueden graficar directamente digitando las coordenadas en la Barra de Entrada o colocando el puntero en las respectivas coordenadas en la Vista gráfica y luego activando la opción Recta que pasa por Dos Puntos de la caja de herramientas



de la Barra de Herramientas, tal como se muestra en el apartado siguiente.

### Recta que pasa por dos puntos

- Se sabe que “por dos puntos diferentes del plano pasa una y solo una recta”; por tanto si se tienen las coordenadas de dos puntos del plano o dos puntos ya graficados entonces se puede determinar la gráfica y la ecuación de la recta que pasa por ellos de la siguiente manera (vea también video sobre gráficas de rectas y semirrectas).

**Ejemplo4:** Dados los puntos  $A(-2, -1)$  y  $B(3, 4)$

- Márquelos en el plano
- Grafique la recta que pasa por ellos

**Desarrollo:**

1. Digitar los pares ordenados en la Barra de Entrada y obtendrá los puntos en la Vista Gráfica y las coordenadas en la Vista Algebraica.

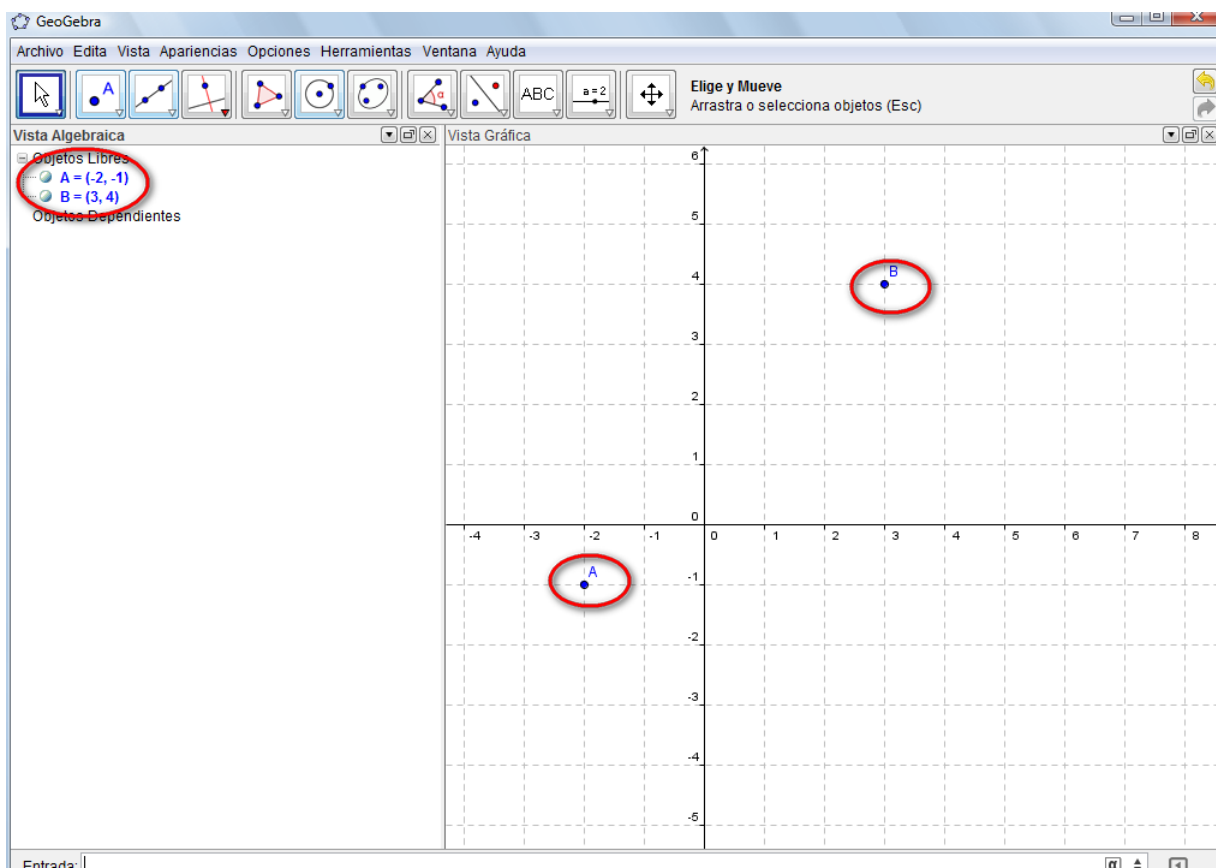



Figura 77: Gráfica de dos puntos

2. Dar clic en la opción “Recta que pasa por dos Puntos de la caja de

herramientas  de la Barra de Herramientas, tal como lo muestra la figura 25.

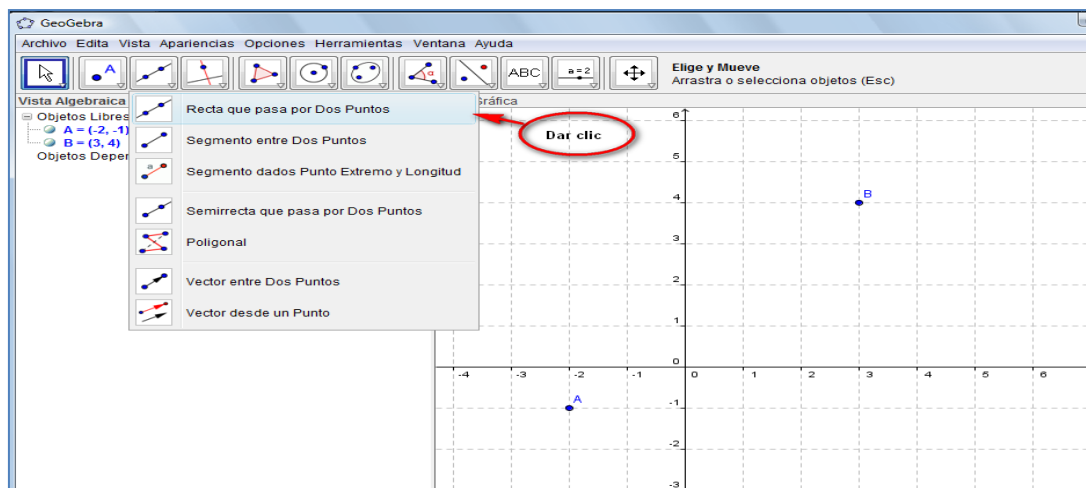


Figura 78: Recta que pasa por dos puntos

- Luego, seleccionar los puntos dando clic sobre cada uno de ellos y se tendrá la recta en la Vista Gráfica y su ecuación en la Vista Algebraica, tal como lo muestra la figura.

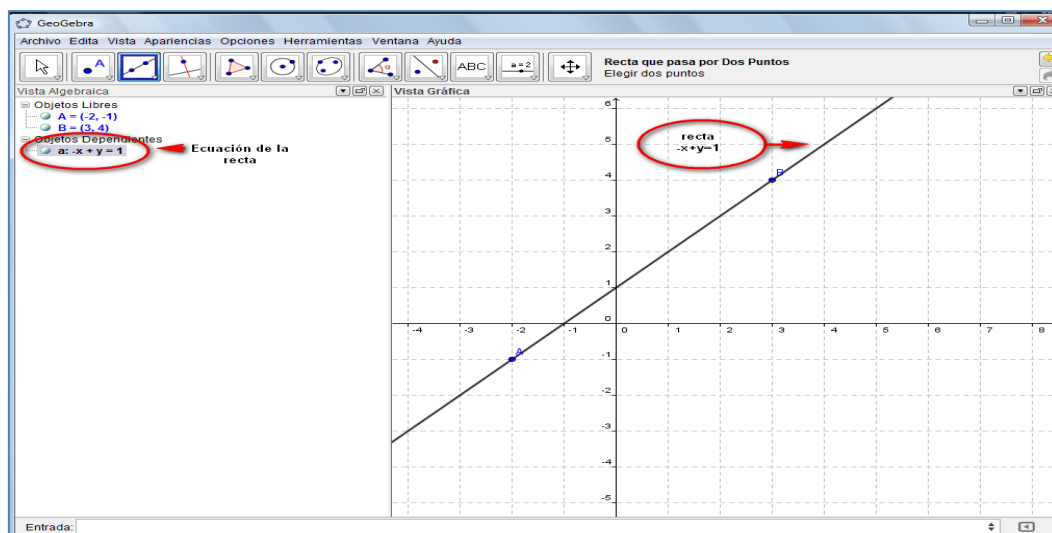


Figura 79: Recta que pasa por dos puntos

**NOTA:** Las líneas rectas pueden ser expresadas mediante una ecuación del tipo  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ ,  $y - y_1 = m(x - x_1)$  o por  $y = mx + b$ , donde  $x$ ,  $y$  son variables en un plano. En dicha expresión  $m$  es

denominada la "pendiente de la recta" y está relacionada con la inclinación que toma la recta respecto a un par de ejes que definen el plano. Mientras que  $b$  es el denominado "término independiente" u "ordenada al origen" y es el valor del punto en el cual la recta corta al eje vertical en el plano. En todos los casos mencionados la recta se puede graficar digitando la ecuación en la Barra de Entrada.

## Semirrecta

- Se llama semirrecta a cada uno de los fragmentos en que toda recta puede ser dividida por cualquiera de los puntos que la componen. Es importante tener en cuenta que la forma correcta de escribir esta palabra es con dos 'r' y no semirrecta (con una sola R), cómo en algunos casos sucede.
- En la figura que se muestra a continuación se puede observar una recta dividida por el A

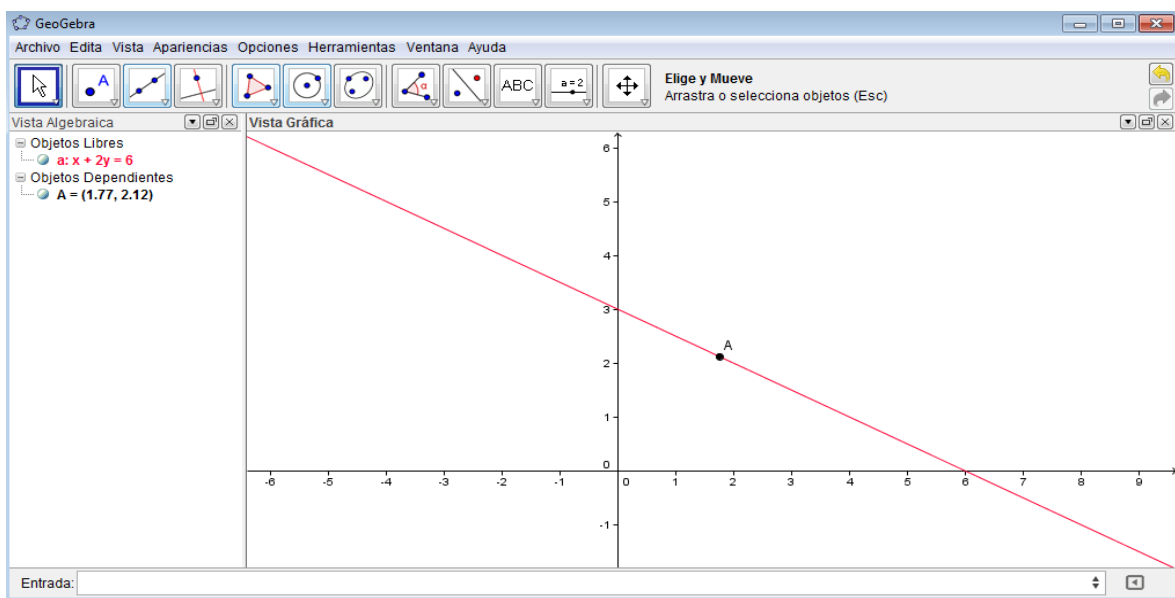


Figura 80: Recta dividida en dos semirrectas

- Para trazar una semirrecta se activa la opción Semirrecta que pasa por



Dos Puntos de la caja de herramientas de la Barra de

Herramientas; luego se selecciona el punto de inicio de la semirrecta y otro punto de ella( ver video sobre rectas y semirrectas).

**Ejemplo5:** Graficar la semirrecta que inicia en el punto  $(-1,2)$  y pasa por  $(3,6)$ .

**Solución:**

**Forma 1**

- i. Graficar los puntos.
- ii. Activar la opción semirrecta que pasa por dos puntos.
- iii. Dar clic en los puntos considerando siempre el orden primero punto de inicio y luego otro por donde pasa la semirrecta.

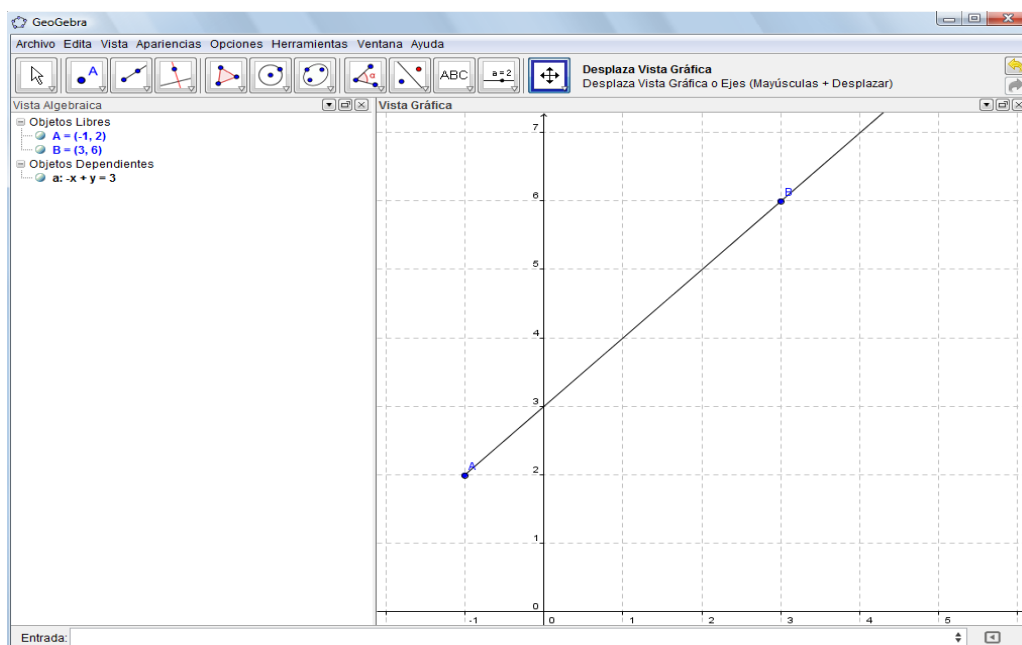


Figura 81: semirrecta que pasa por dos puntos

• **Forma 2**

- i. Digitar en la Barra de Entrada la palabra semirrecta y le presentará las dos opciones siguientes:
  1. Digitar el punto de inicio y punto por donde pasa la semirrecta y luego dar *Enter* tal como se muestra a continuación (ver además video sobre rectas y semirrectas).



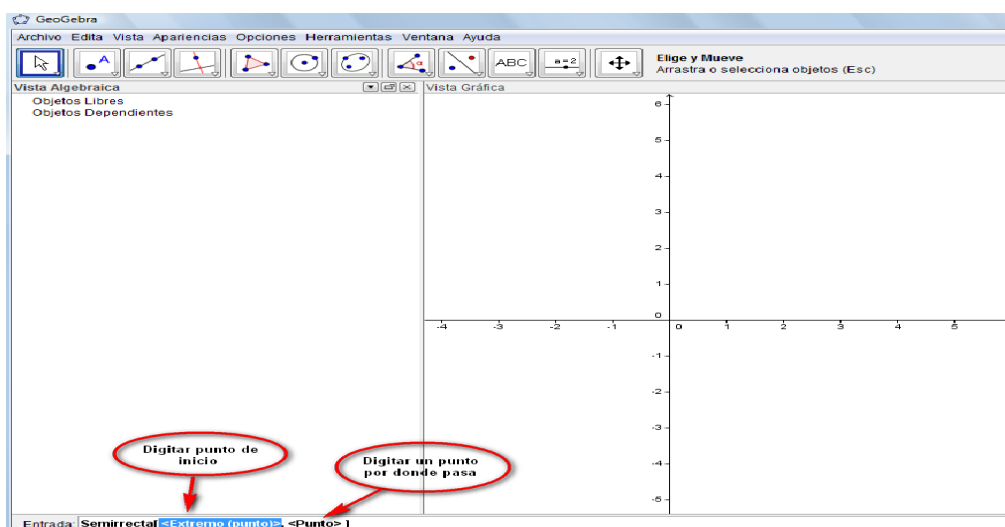


Figura 82: Semirrecta que pasa por dos puntos

- Al trazar la semirrecta que inicia en el punto  $(-3,0)$  y pasa por el punto  $(1,4)$  se tiene la siguiente figura.

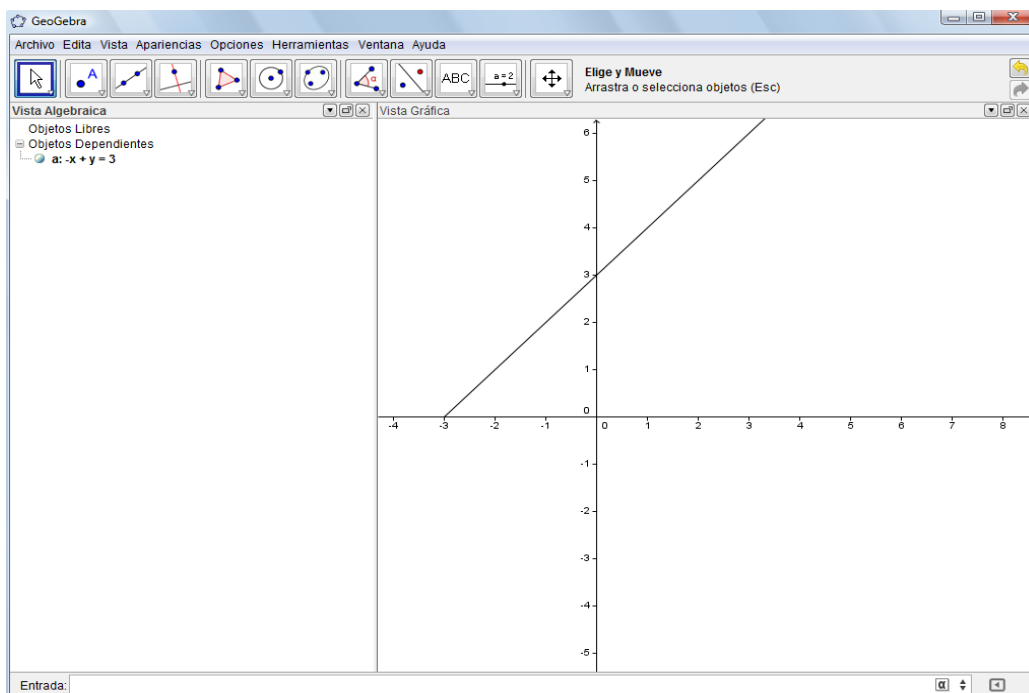


Figura 83: Gráfico de la semirrecta que pasa por dos puntos

2. Digitar el punto de inicio y un vector que determine la dirección de la semirrecta, digitar en la barra de entrada semirrecta y le presentará dos opciones de ayuda en esta oportunidad

seleccionar punto vector tal como lo indica la figura. (ver video sobre rectas y semirrectas),

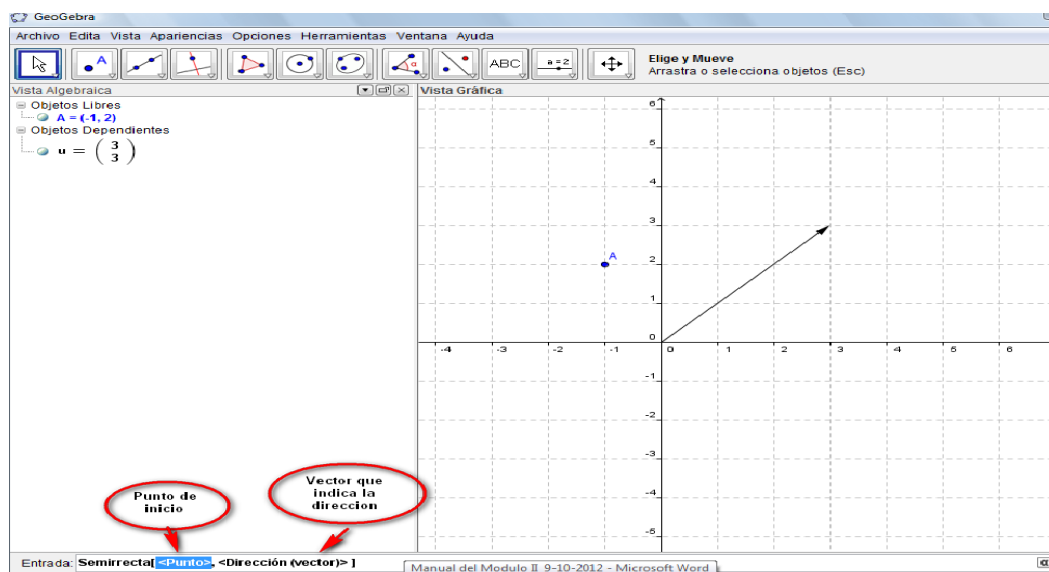


Figura x

- Luego digitar en Barra de Entrada “semirrecta y los elementos antes mencionados presionar la tecla *Enter* y se tendrá el gráfico siguiente:

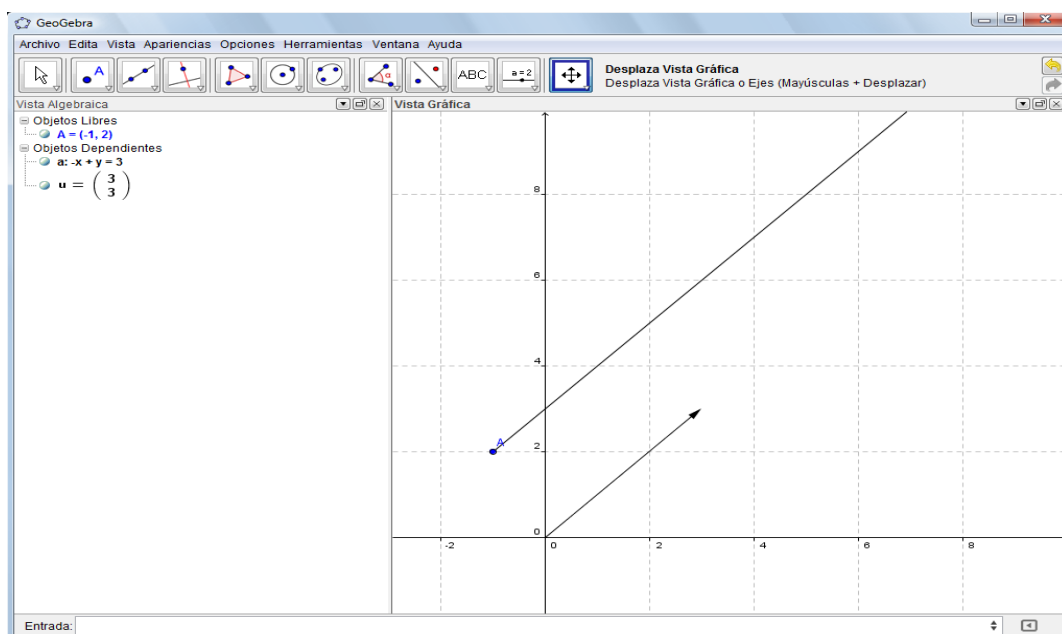


Figura 84: Gráfica de la semirrecta punto vector

## Segmentos entre dos puntos

- Un segmento, en geometría, es un fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos, llamados puntos extremos o finales. Así, dados dos puntos A y B, se le llama segmento AB a la intersección de la semirrecta de origen A que contiene al punto B con la semirrecta de origen B que contiene al punto A. Los puntos A y B son extremos del segmento y los puntos sobre la recta a la que pertenece el segmento (la «recta sostén»), serán interiores o exteriores al segmento según pertenezcan o no a este.

## Segmento dado un punto extremo y su longitud

- Cuando se conoce el punto de origen y la longitud un segmento, este se puede graficar aplicando cualquiera de los siguientes procesos:
  1. Graficando primero las coordenadas el punto de partida(A); luego digitar en la Barra de Entrada segmento (Punto de partida, longitud del segmento) y dando *Enter* aparecerá el segmento graficado en la vista gráfica.

**Ejemplo:** Graficar el segmento de recta que inicia en el punto (2,1) y tiene longitud 5cm).

### Solución.

- ✓ Graficar el punto A(2,1)
- ✓ Digitar en la Barra de Entrada “Segmento (A,5)” y presionar *Enter*.
- ✓ Se tendrá la figura 32.

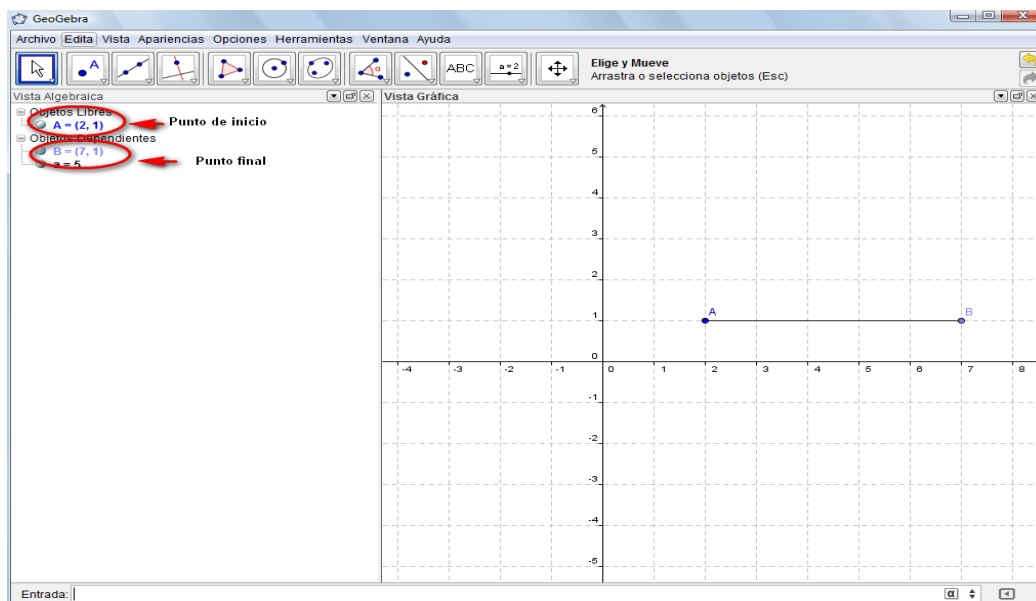


Figura 85: Segmento dado un punto y su longitud

2. Digitar de una vez en la Barra de Entrada "Segmento (coordenadas del punto, Longitud del segmento)"; luego dar *Enter*. Así para el ejemplo anterior digitamos en la Barra de Entrada "*Segmento*[(2,1),5]" y se tendrá la figura siguiente:

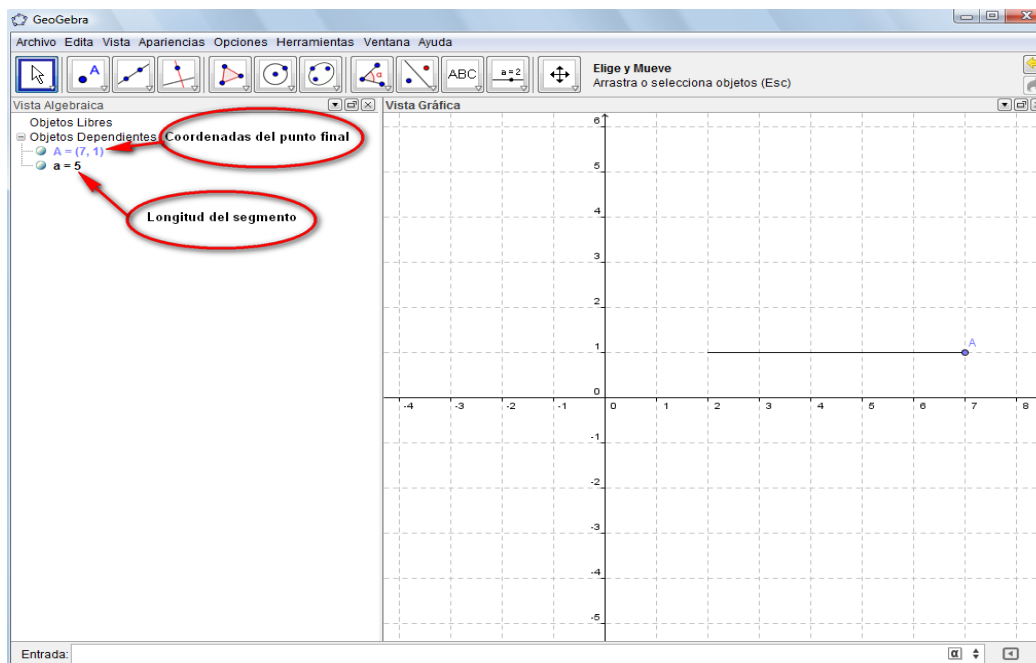


Figura 86: Segmento de inicio en A y longitud a

### 3. Activando la opción Segmento dados Punto Extremo y Longitud



de la caja de herramientas de la Barra de Herramientas; en este caso se realiza el proceso que se muestra en el ejemplo siguiente:

**Ejemplo:** Graficar el segmento que inicia en el punto (2,1) y tiene longitud 4.

✓ Se gráfica el punto.

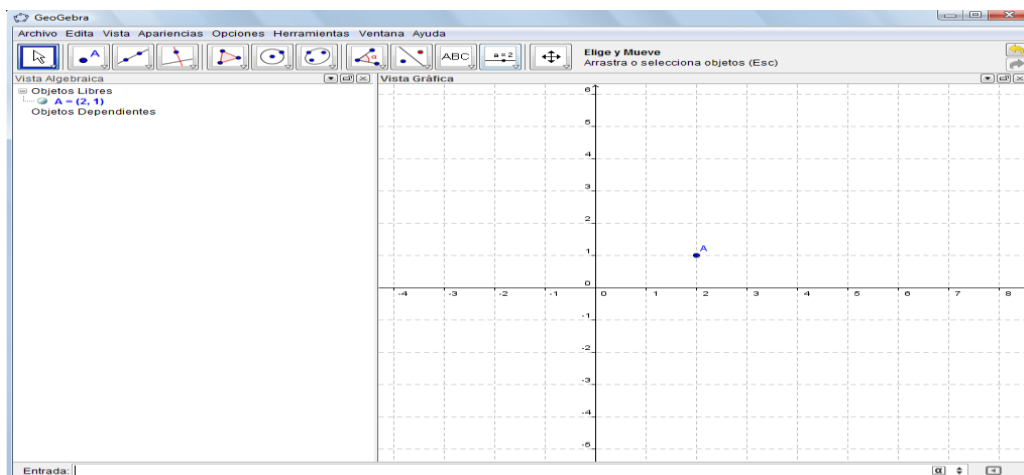


Figura 87: Gráfica del punto

✓ Se activa la opción Segmento dados Punto Extremo y Longitud y se da clic en el punto de inicio, y se activa el cuadro de diálogo en el cual se debe digitar la longitud del segmento.

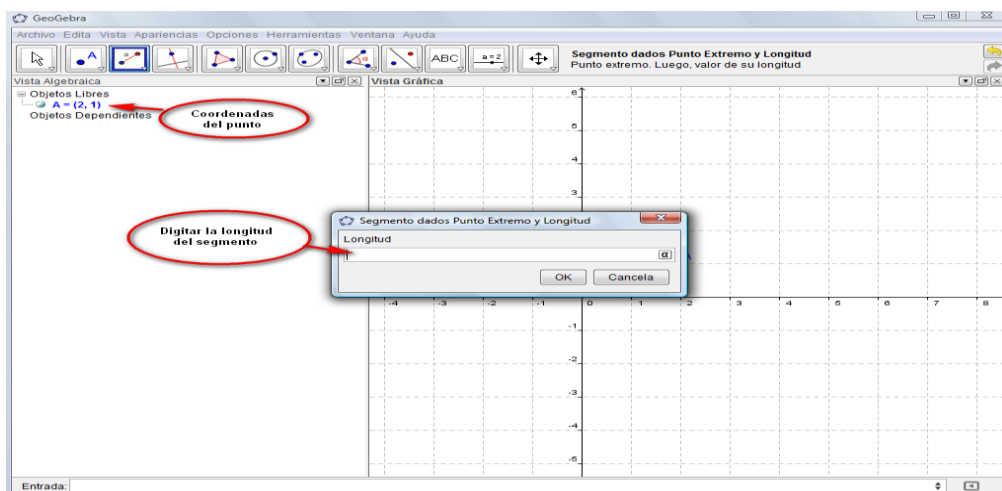


Figura 88: Creación de un segmento con punto de inicio y longitud

- ✓ Al digitar la longitud del segmento y dar ok, se tendrá el gráfico que se muestra en la figura 36.

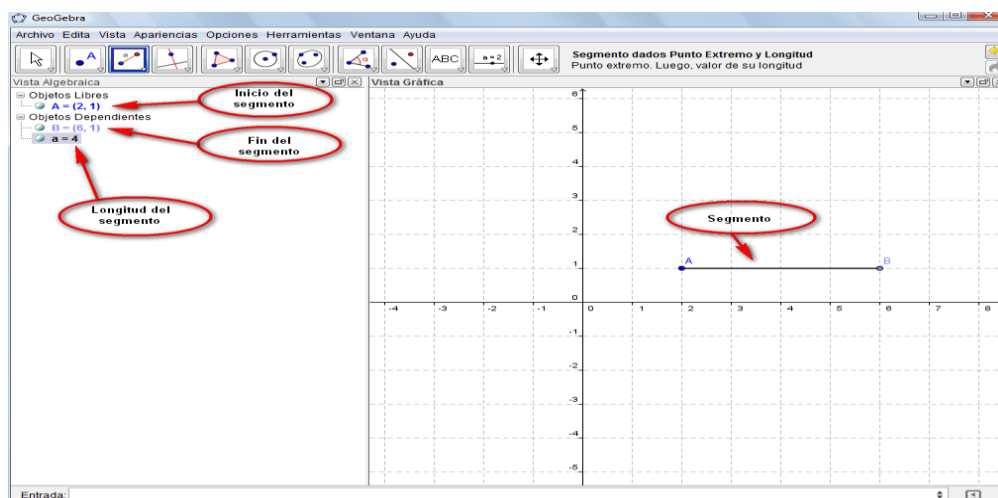


Figura 89: Grafico de un segmento con punto de inicio y longitud

## Segmento que pasa por dos puntos

- Cuando se tiene el punto de origen y el punto final de un segmento de recta, entonces para graficarlo se puede aplicar cualquiera de los procedimientos siguientes:
  1. Se pueden graficar primero los dos puntos, luego se activa la opción segmento entre dos puntos de la caja de herramientas



de la Barra de Herramientas.

**Ejemplo:** Graficar el segmento que va desde el punto  $(-1, 4)$  hasta el punto  $(4, 2)$ .

- ✓ Graficar el punto.
- ✓ Activar la opción “segmento entre dos puntos”
- ✓ Seleccionar los puntos.

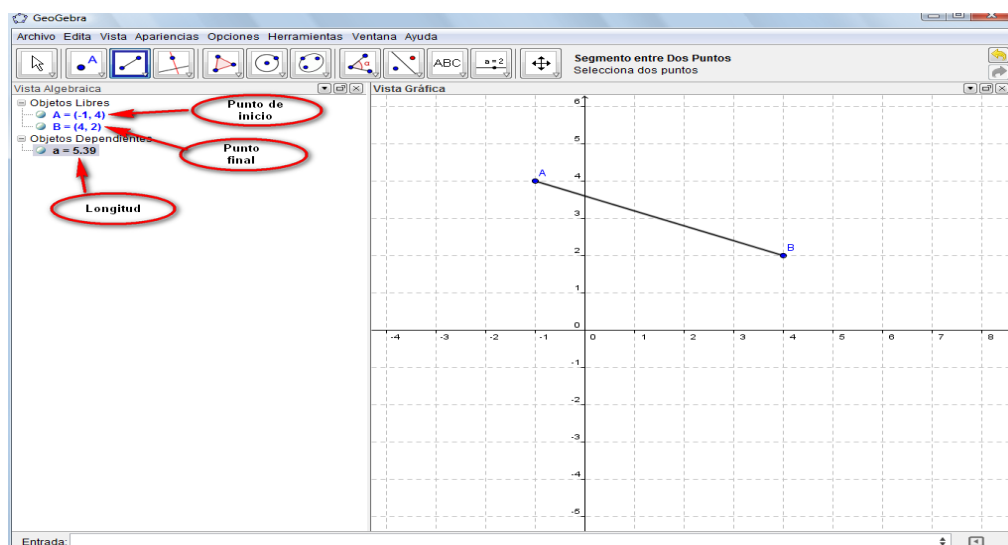


Figura 90: Segmento entre dos puntos

2. Digitar en la Barra de Entrada " $\text{Segmento}[(-1,4),(4,2)]$ "; luego dar *Enter* y aparecerá en la Vista Gráfica el segmento y en la Vista Algebraica la longitud, tal como lo muestra la figura 38.

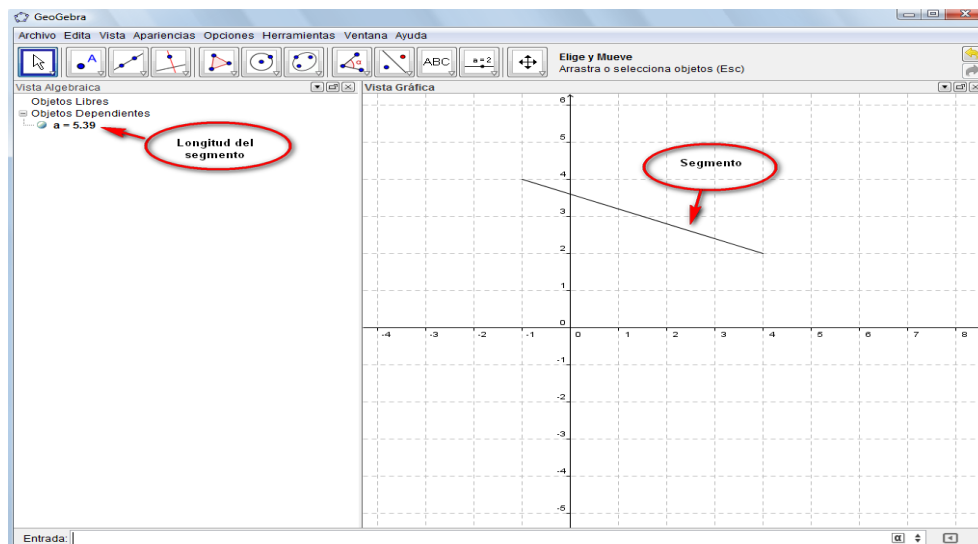


Figura 91: Segmento entre dos puntos



## Vector

- Un vector se puede ver desde el punto de vista de la geometría como vector geométrico. Un vector fijo del plano es un segmento orientado, en el que hay que distinguir tres características:
  - ✓ Módulo: la longitud del segmento
  - ✓ Dirección: la orientación de la recta
  - ✓ Sentido: indica cual es el origen y cual es el extremo final de la recta.

**Ejemplo:** En la figura siguiente se muestra el vector  $u$ , que inicia en el punto A y termina en el punto B.

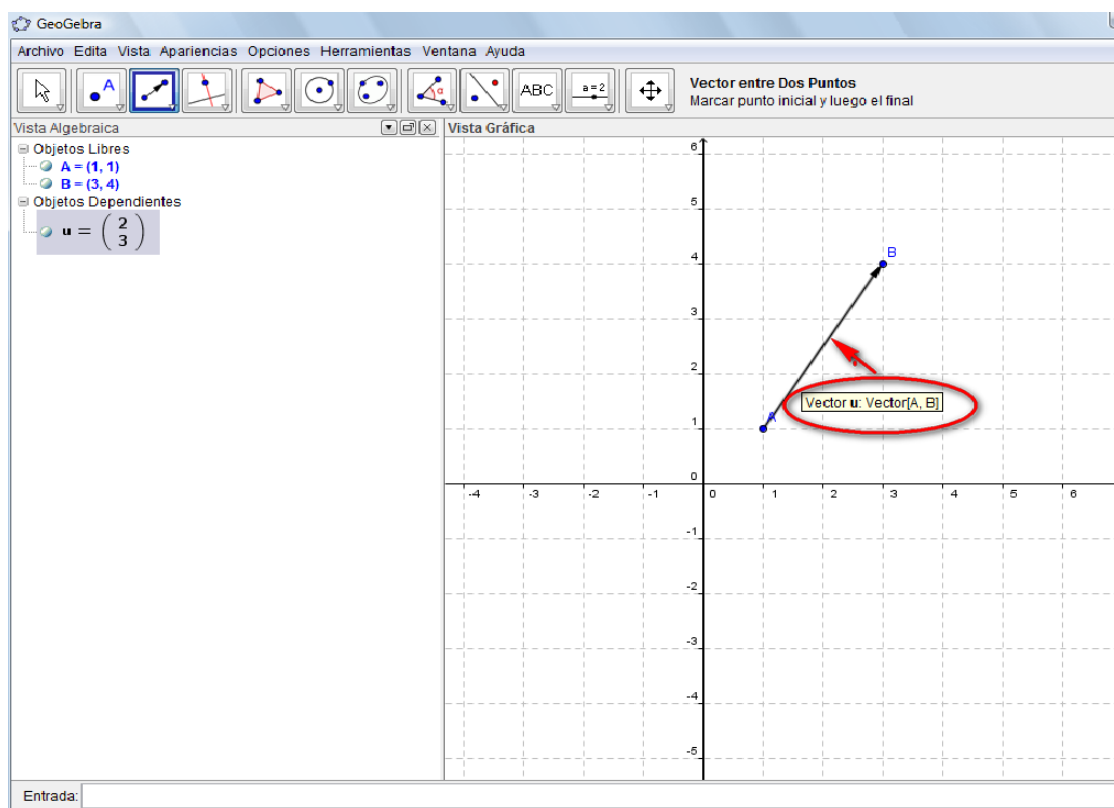


Figura 92: Ejemplo de vector

## Vector entre dos puntos

- Para graficar un vector entre dos puntos se puede aplicar cualquiera de las siguientes alternativas:

- Se activa la opción Vector entre Dos Puntos de la caja de



herramientas de la Barra de Herramientas. Para ello se aplica el proceso que se ilustra en el ejemplo siguiente.

- Ejemplo:** Graficar el vector que se encuentra entre los puntos (2,0) y (5,5).

### Solución:

- ✓ Graficar los puntos
- ✓ Activar la opción Vector entre Dos Puntos.
- ✓ Dar clic sobre los puntos. y así se tendrá la figura siguiente.

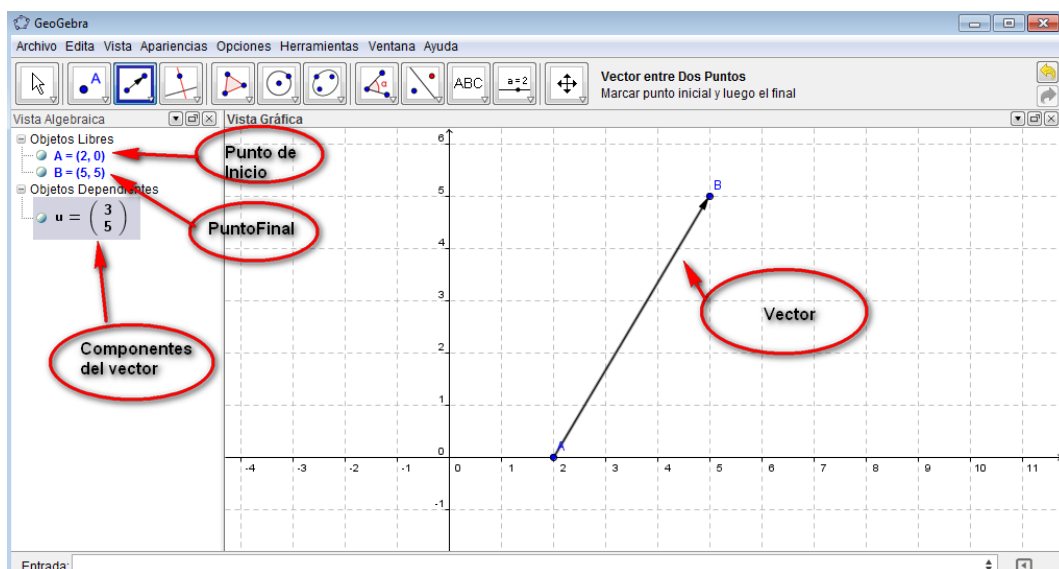


Figura 93: Vector entre Dos Puntos

2. Desde la Barra de entrada digitando,  $\text{Vector}[(\text{punto inicial}), (\text{punto final})]$  y luego dando Enter; tal como se muestra en el ejemplo.

- **Ejemplo:** Siempre para el mismo caso anterior si graficamos el vector cuyo punto de inicio es el punto (2,0) y el punto final (5,5).

**Solución:**

- ✓ Digitar en la Barra de Entrada  $\text{Vector}[(2,0), (5,5)]$
- ✓ Dar *Enter* y se tendrá el gráfico que se muestra en la figura siguiente.

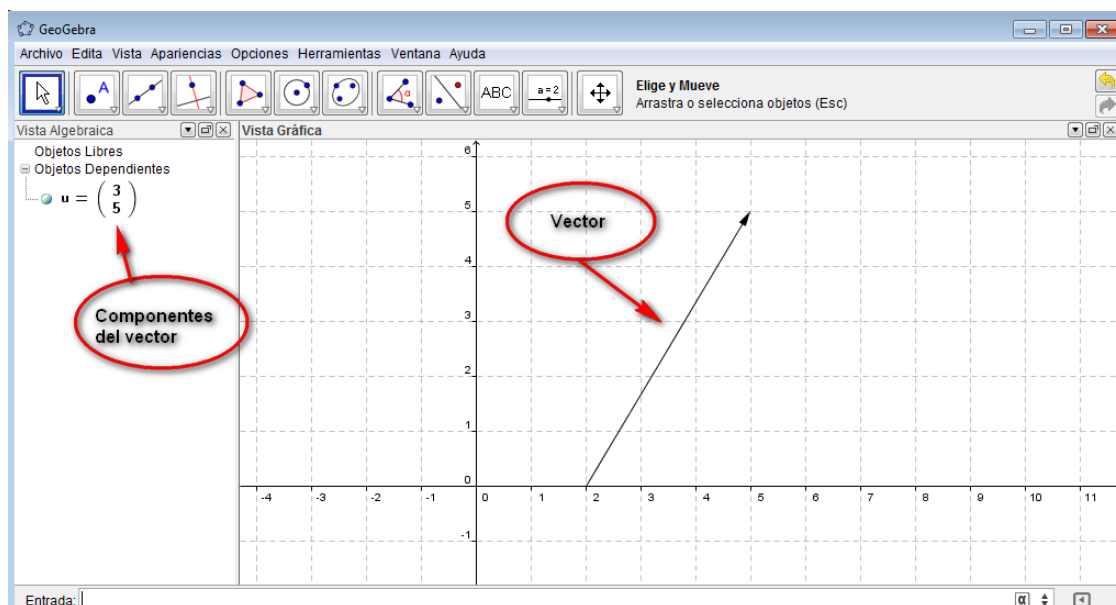


Figura 94: Vector entre Dos Puntos

Nota: Obsérvese que en este caso no se visualizan en la Vista Algebraica las coordenadas del punto inicial ni final.

## Vector desde un punto

- Cuando se tiene un vector y se desea trasladar a otro punto se puede aplicar cualquiera de los procesos siguientes:

1. Activar la Opción Vector desde un Punto de la caja de



herramientas de la Barra de Herramientas, siguiendo el proceso descrito a continuación.

**Ejemplo:** Dado el vector cuyo punto inicial es  $(0,0)$  y el punto final  $(3,4)$ , trasladarlo para que el punto inicial sea el punto  $(-1,2)$ .

### Solución:

- ✓ Graficar el vector  $[(0,0), (3,4)]$
- ✓ Graficar el punto  $(-1,2)$
- ✓ Activar la Opción Vector desde un Punto
- ✓ Dar clic en el punto y luego en el vector.

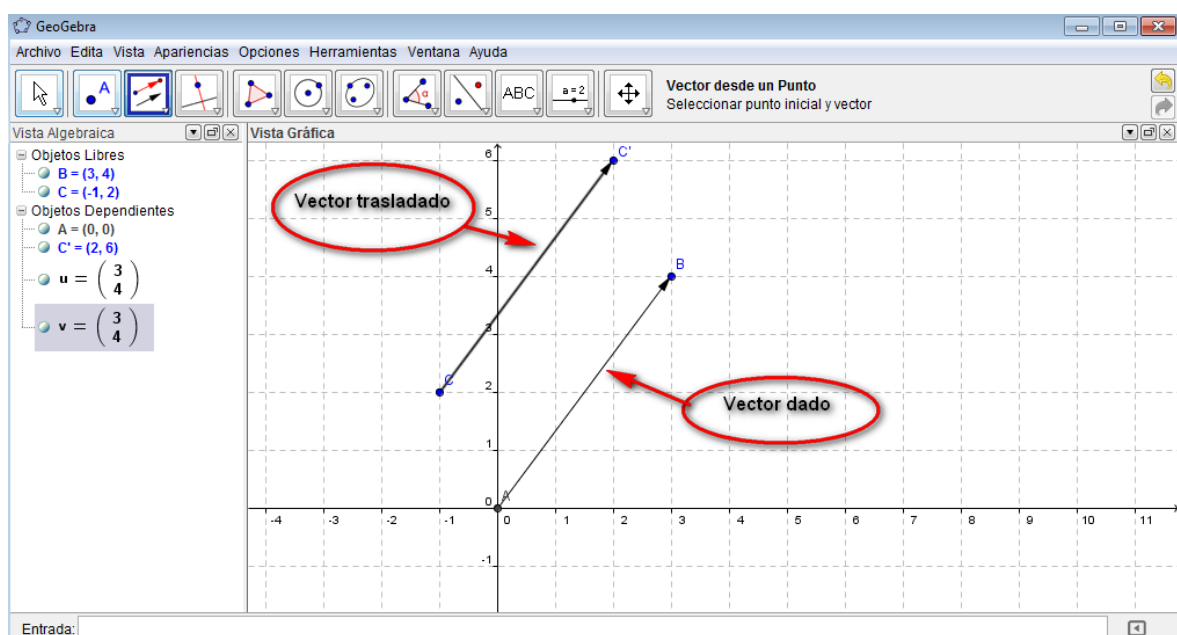


Figura 95: Vector desde un Punto

## Tema 3: Los polígonos


### Polígono

- En geometría un polígono se puede definir como la parte del plano limitada por una poligonal cerrada (poligonal es un conjunto ordenado de segmentos tales que el extremo de uno coincide con el origen del siguiente), dependiendo del número de lados los polígonos reciben nombres particulares como: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágono, etc. Además en un polígono se pueden distinguir los siguientes elementos geométricos:
  - ✓ **Lado (L):** es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
  - ✓ **Vértice (V):** es el punto de intersección (punto de unión) de dos lados consecutivos.
  - ✓ **Diagonal (D):** es el segmento que une dos vértices no continuos.
  - ✓ **Perímetro (P):** es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.
  - ✓ **Semiperímetro (SP):** es la mitad perímetro.
  - ✓ **Ángulo interior (AI):** es el ángulo formado internamente por dos los lados consecutivos.
  - ✓ **Ángulo exterior (AE):** es el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo
- Los polígonos se pueden clasificar también en regulares e irregulares: regulares cuando todos sus lados y ángulos son congruentes entre si, caso contrario son irregulares. En un polígono regular se puede distinguir, además:
  - ✓ **Centro (C):** es el punto equidistante de todos los vértices y lados.
  - ✓ **Ángulo central (AC):** es el formado por dos segmentos de recta que parten del centro a los extremos de un lado.

✓ **Apotema (a):** es el segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.

✓ **Diagonales totales,**  $Nd = \frac{n(n-3)}{2}$  en un polígono de  $n$  lados.

- Para trazar un polígono cualquiera en GeoGebra se puede aplicar cualquiera de los procesos que se detallan a continuación.

1. Activando la opción Polígono de la caja de herramientas  de la Barra de Herramientas, tal como se muestra en el ejemplo (ver también video “Creación de Polígonos”).

**Ejemplo:** Crear el polígono cuyos vértices son los puntos  $(-1, -2)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, -1)$  y  $(1, -3)$ .

**Solución:**

✓ Graficar los puntos con la opción Nuevo Punto de la caja

de herramientas  de la Barra de Herramientas.

✓ Unir los puntos con la opción Polígono de la caja de

herramientas .

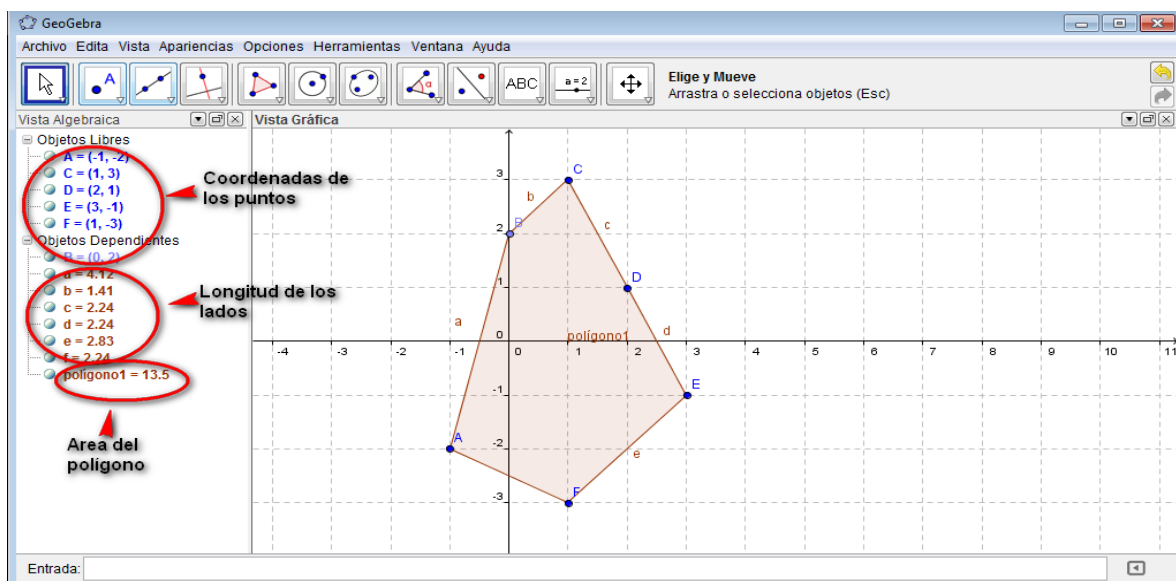


Figura 96: Construcción de un polígono

2. Dando clic en los puntos dados guiándose por la cuadrícula; luego de haber activado la opción Polígono.(ver video sobre” Creación de Polígonos”)

**Ejemplo:** siempre para el caso anterior:

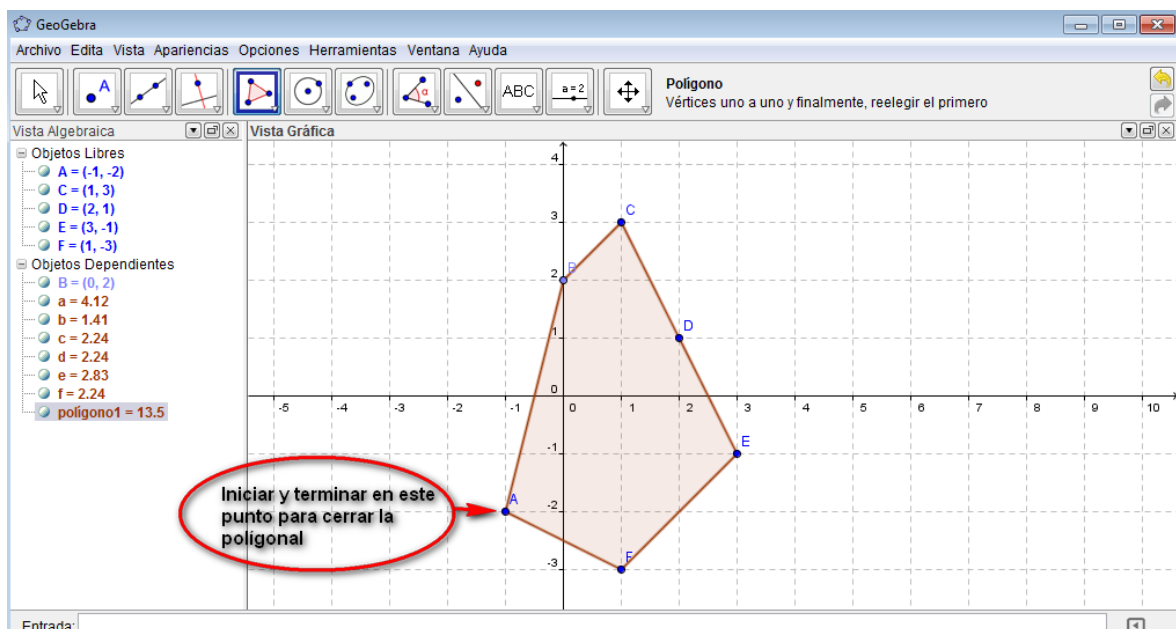



Figura 97: creación de polígonos

### Polígono regular

- Para construir un polígono regular de  $n$  lados se debe realizar el siguiente procedimiento:
  - ✓ Activar la opción “Polígono Regular” de la caja de herramientas  de la Barra de Herramientas.
  - ✓ Graficar dos puntos que determinen uno de los lados del polígono.
  - ✓ Al graficar uno de los lados del polígono desplegará un cuadro de dialogo donde le pedirá el numero de lados.

**Ejemplo:** graficar un polígono regular de 8 lados, que tiene como vértices los puntos A(-1,1) y B(1,-2).



## Solución:

- ✓ Graficar los puntos A y B.
- ✓ Activar la opción Polígono Regular, de la caja de herramientas



- ✓ Dar clic sobre los puntos y se activará el cuadro de diálogo para solicitar el número de lados.

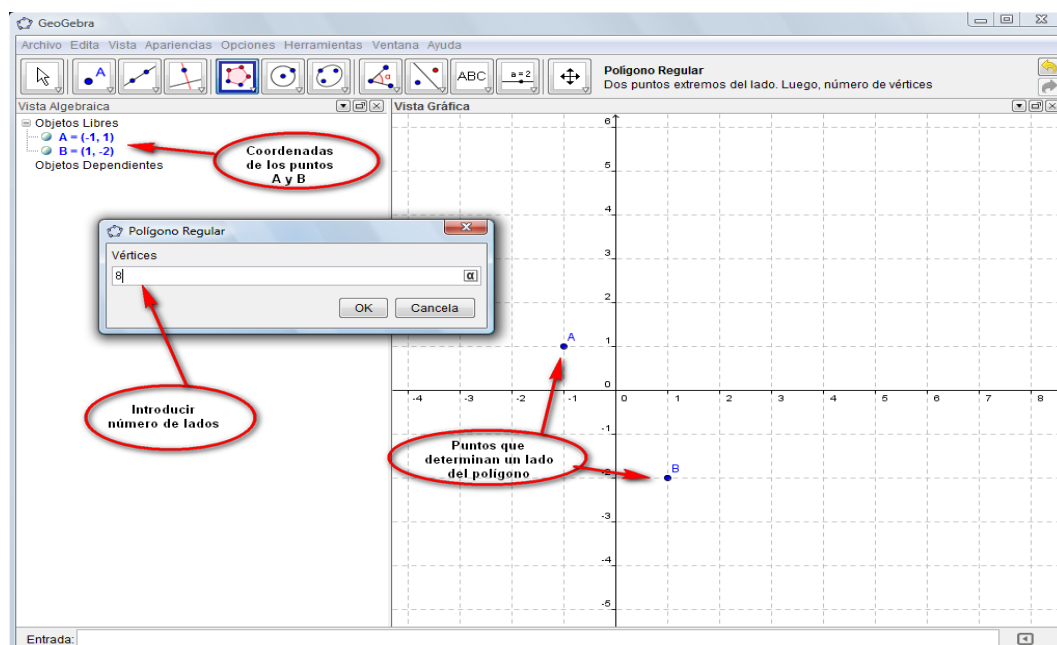


Figura 98: Introducción del número de lados de un polígono regular

- ✓ Digitar el número lados y dar ok. Así se obtendrá la figura que se muestra a continuación. (ver video sobre “Creación de Polígonos”)



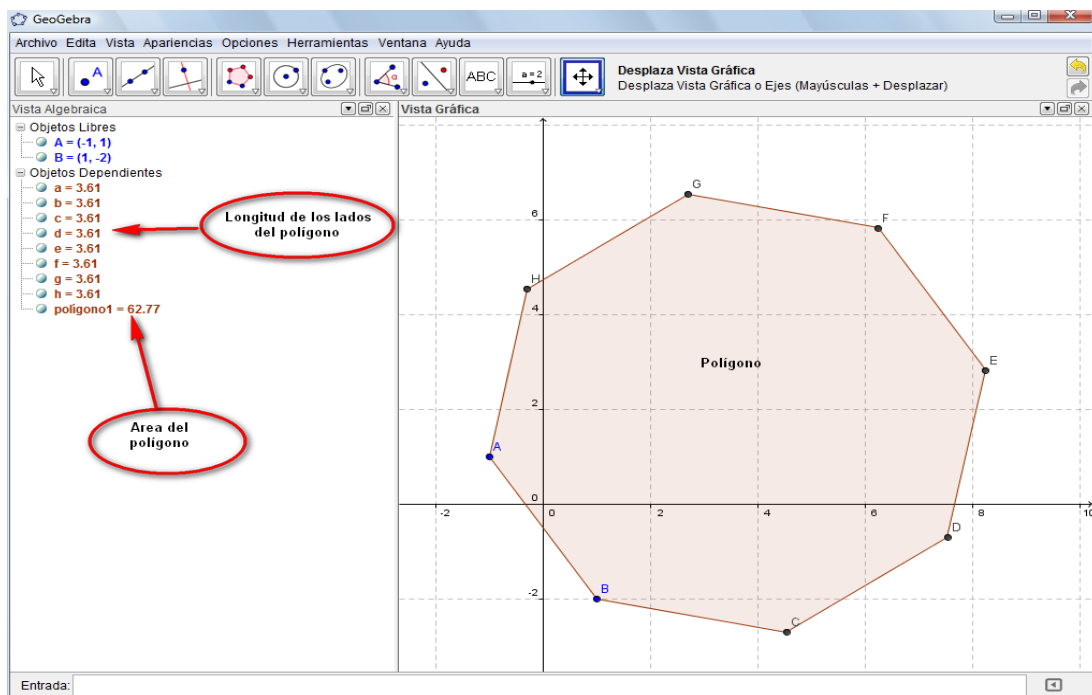


Figura 99: Polígono Regular

## Polígono rígido

- Se denomina polígono rígido a los que una vez se hayan creados no se puede modificar ninguna de sus características. Estos polígonos se pueden crear si se activa la opción Polígono Rígido de la caja de



herramientas de la Barra de Herramientas aplicando el proceso que se muestra a continuación.

**Ejemplo:** Graficar el polígono que tiene como vértices  $(-1,2)$ ,  $(-1,4)$ ,  $(2,4)$ ,  $(4,2)$ ,  $(3,0)$ , y  $(0,0)$ .

### Solución:

- ✓ Graficar los puntos
- ✓ Activar la opción Polígono Rígido
- ✓ Dar clic sobre los puntos graficados, así se tendrá la siguiente figura.

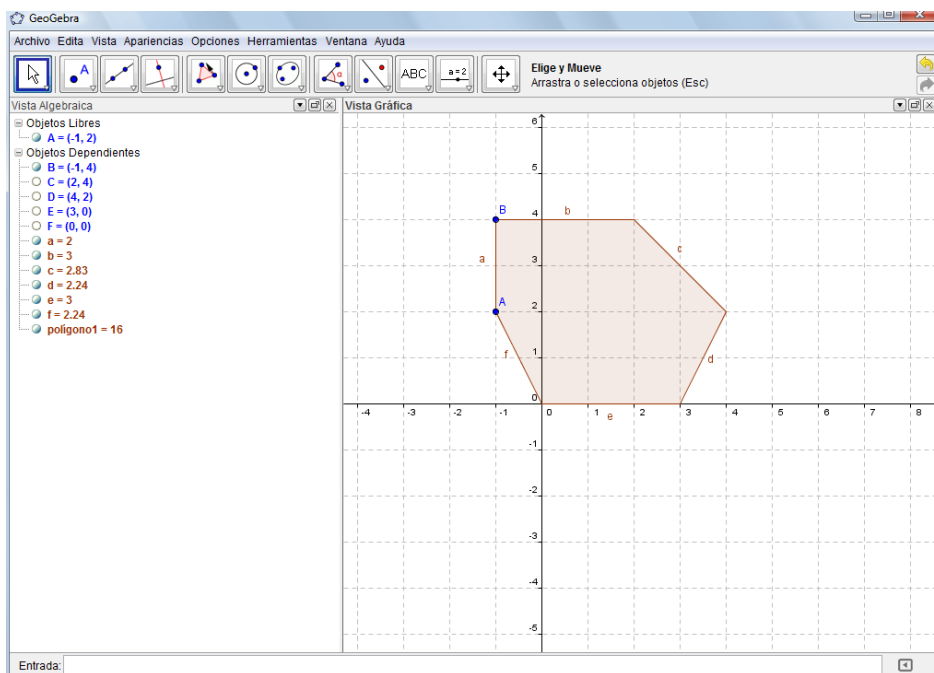


Figura 100: Polígono Rígido

# MÓDULO III

## *ELEMENTOS DE ALGEBRA*

## MÓDULO III

### Introducción

---

En el módulo III “**ELEMENTOS DE ALGEBRA**”, se trabajará con la Barra de Entrada, la Vista Algebraica, y la Vista Gráfica para analizar la forma de introducir expresiones algebraicas tales como polinomios, ecuaciones etc. para describir e ilustrar el proceso de factorización, solución de ecuaciones lineales con una y dos incógnitas y su visualización en la Vista Gráfica para analizar la solución, aplicando el método gráfico así como la solución de desigualdades lineales y cuadráticas.

Para realizar las actividades de este módulo se pretende que el docente revise el material del módulo III: recursos multimedia, plan del módulo, manual; así como también la descripción sobre la Barra de Entrada y su ayuda plasmada en el material multimedia del módulo I.

### Objetivos

---

#### Objetivo General

Resolver ecuaciones y desigualdades lineales y cuadráticas.

#### Objetivos Específicos

- Describir y practicar el proceso de introducción de expresiones algebraicas.
- Describir y ejemplificar el proceso de solución de ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Describir y ejemplificar el proceso de solución de las desigualdades lineales y cuadráticas.

## Tema 1 Expresiones Algebraicas

### Polinomios

- Se llama expresión algebraica a toda constante, variable o bien a toda combinación de constantes y potencias de variables que estén ligadas por alguno de los signos de operación  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ . Según el número de términos que estén ligados por dichos signos las expresiones algebraicas se clasifican en monomios y polinomios.

Los monomios son los que carecen de signos de operación ; mientras que las expresiones que tienen uno o más signos se denominan polinomios.

### Factorización de polinomios

- Factorizar una expresión algebraica es expresarla como una multiplicación de dos o más factores que pueden ser números o y/o letras. En ese sentido factorizar un polinomio es expresarlo como el producto de números y/o letras tales que al efectuar la multiplicación se reproduzca la expresión original.
- Para factorizar manualmente una expresión algebraica existen diferentes formas dependiendo de la naturaleza de la expresión, el conjunto de esas formas de factorizar se denominan casos del factoreo y cada una de las ellas tiene un proceso particular que seguir; mientras que si hacemos uso de GeoGebra la factorización se facilita pues independientemente de la naturaleza de la expresión el proceso es el mismo.
- Para factorizar haciendo uso de GeoGebra digitar en la Barra de Entrada o en la Hoja de Cálculo “Factoriza (polinomio), damos Enter y se tendrá en la Vista Algebraica la expresión ya factorizada.

**Ejemplo:** factorizar el polinomio  $x^2 - 13x + 42$  (ver video sobre factorización de polinomios)

Solución:

- ✓ Tener activada solamente la Vista Algebraica( recuerde desde el Menú Vista de la Barra de Menú)
- ✓ Digitar en la Barra de Entrada “Factoriza( $x^2 - 13x + 42$ )”

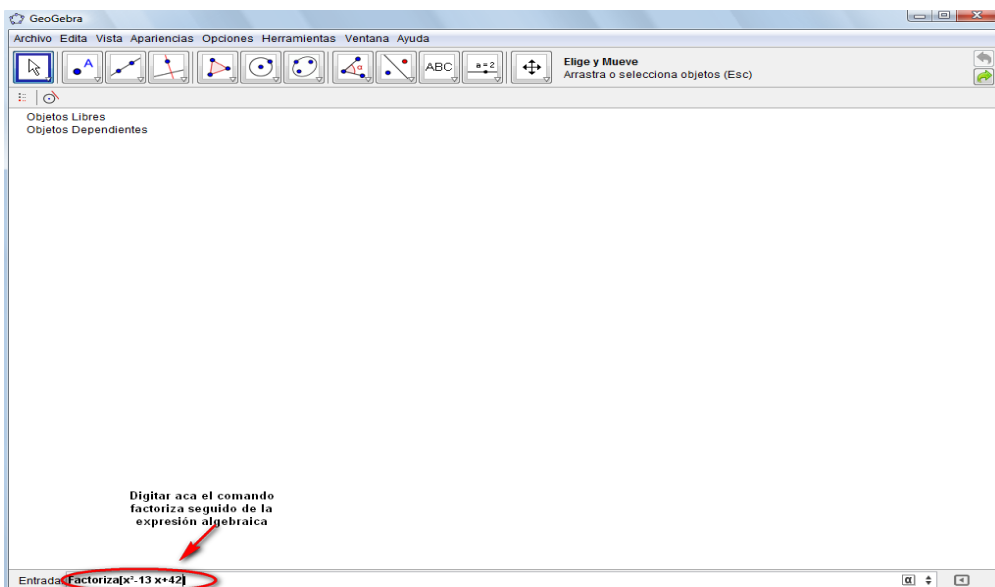


Figura 101: Introducción de expresiones algebraicas

- ✓ Dar Enter y se tendrá en pantalla, la figura que se muestra a continuación.

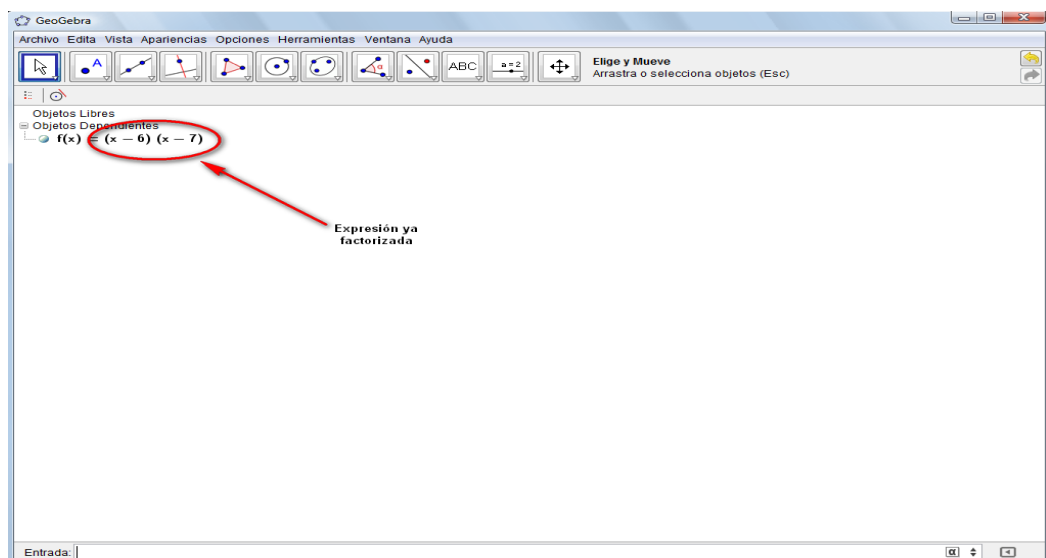


Figura 102: Factorización de expresiones algebraicas

- ✓ De los dos pasos anteriores se puede determinar que al Factorizar la expresión  $x^2 - 13x + 42$  se obtiene  $(x - 6)(x - 7)$ ; es decir

$$x^2 - 13x + 42 = (x - 6)(x - 7)$$

**Nota:** Trabajar los ejercicios presentados en la guía sobre elementos de álgebra.

## Tema 2 Ecuaciones

### Ecuaciones lineales con una y dos incógnitas

- Una ecuación lineal o de primer grado es aquella que en su planteamiento involucra una o mas variables elevadas a la primera potencia; es decir el exponente es la unidad. Por ejemplo  $3x - 8 = 20$ ,  $2x + 5y = 9$ , las dos son lineales, con la diferencia que la primera tiene una incógnita y la segunda dos incógnitas.

### Solución de ecuaciones con una y dos incógnitas

- Para resolver las ecuaciones lineales con una incógnita se aplican las diferentes propiedades de las ecuaciones que permitan poco a poco realizar el despeje de la variable de interés; pero si se hace uso de GeoGebra, entonces es necesario.
  - Activar la Vista Algebraica.
  - Digitar la ecuación en la barra de entrada.
  - Dar, Enter.

**Ejemplo:** resolver la siguiente ecuación  $x + 3 = 5x + 11$

- ✓ Activar únicamente la Vista Algebraica y la Vista Gráfica
- ✓ Digitar la ecuación en la Barra de Entrada.

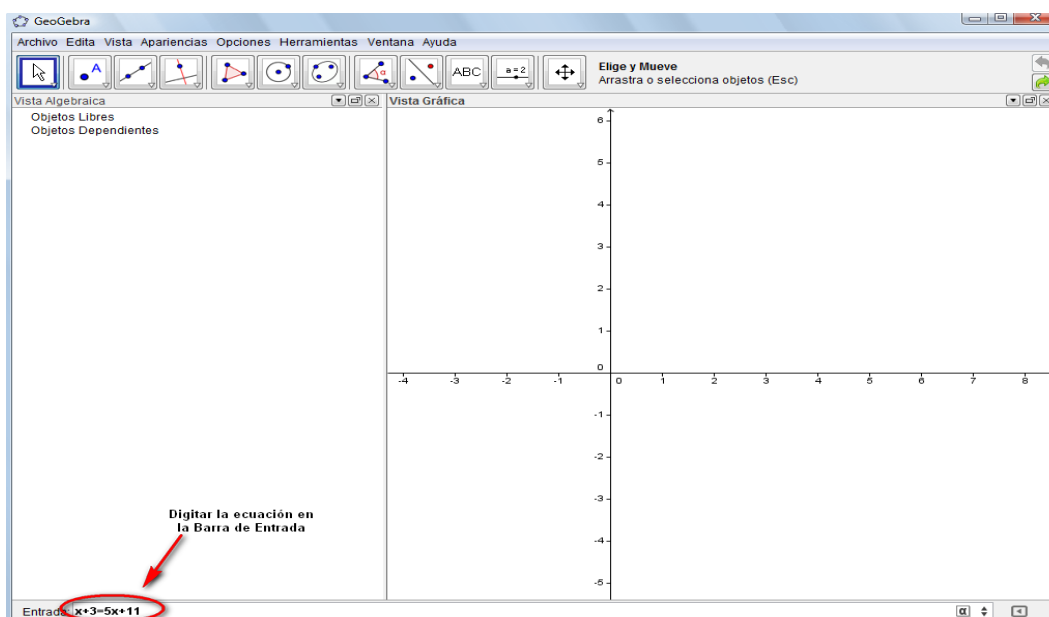


Figura 103: Introducción de ecuaciones

- ✓ la ecuación en forma analítica y gráfica, tal como se muestra en la figura
4. Dar Enter y se tendrá en pantalla la solución de

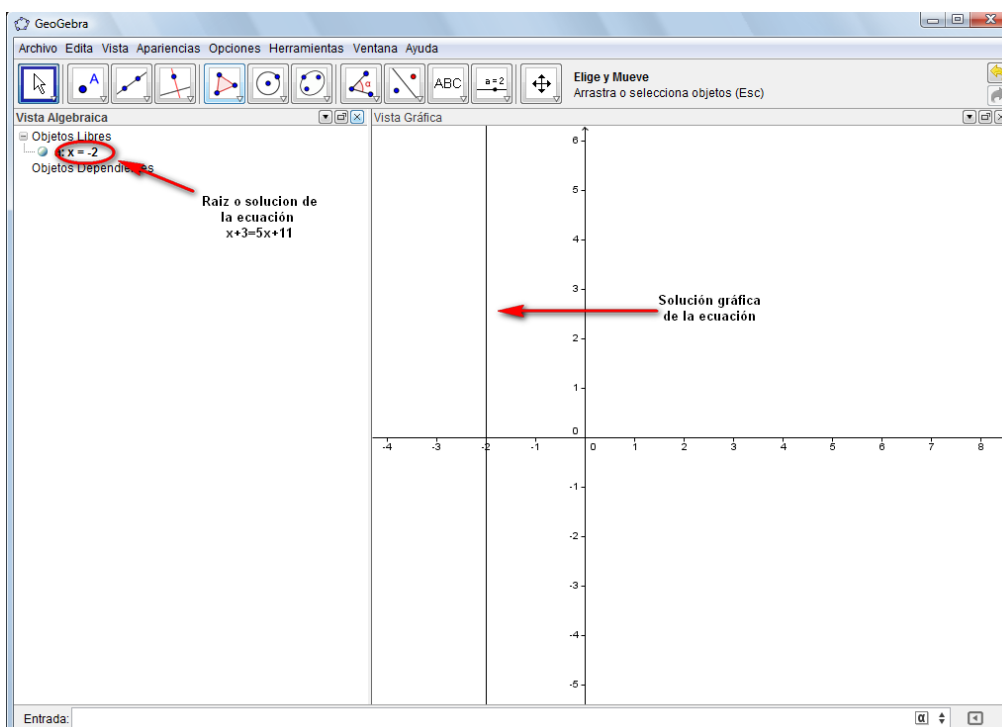


Figura 104: Solución de ecuación lineal con una incógnita.

- Para resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas, se aplica el proceso siguiente:
  - Se introducen las ecuaciones una después de la otra.



- Se determina el punto de intersección de la gráfica de las dos ecuaciones.
- Las coordenadas del punto de intersección de las gráficas es el conjunto solución del sistema.

**Ejemplo:** Determinar el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 7y = 30 \end{cases}$$

Solución: (ver video sobre solución de de ecuaciones)

- ✓ Introducir la ecuación 1

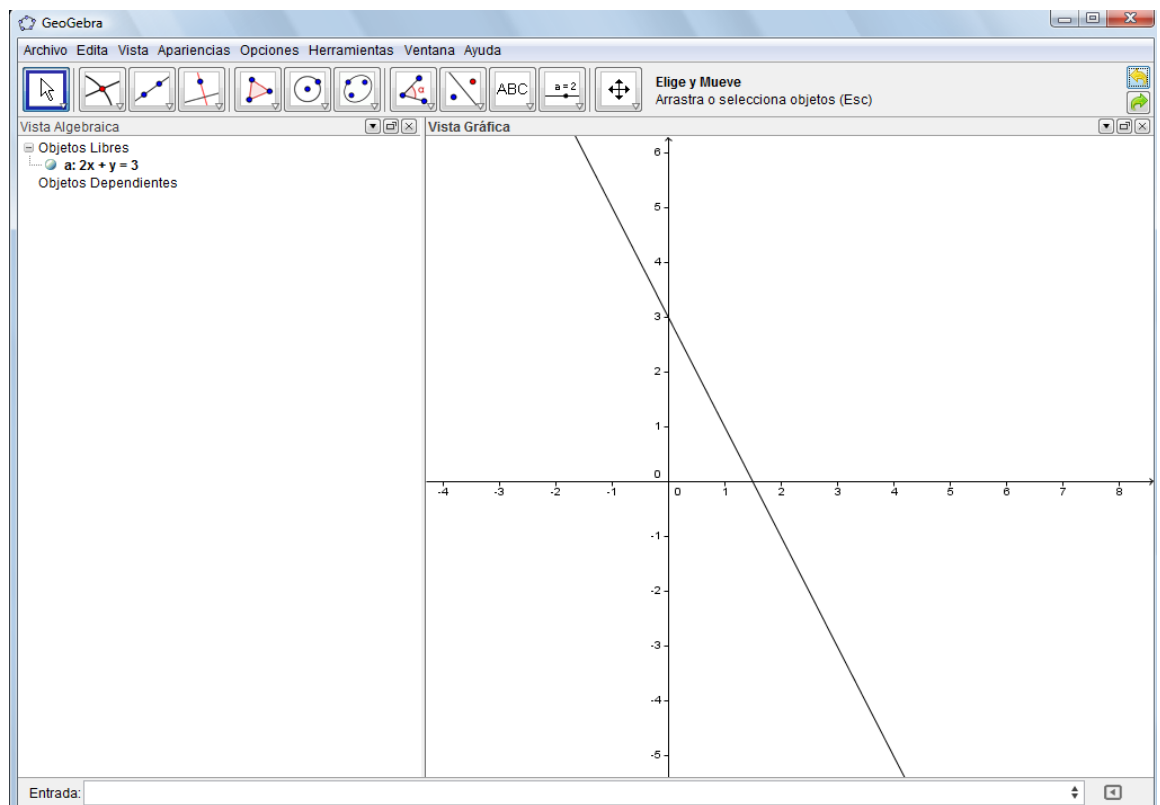


Figura 105: Introducción de ecuaciones con dos incógnitas.

- ✓ Introducir la ecuación 2

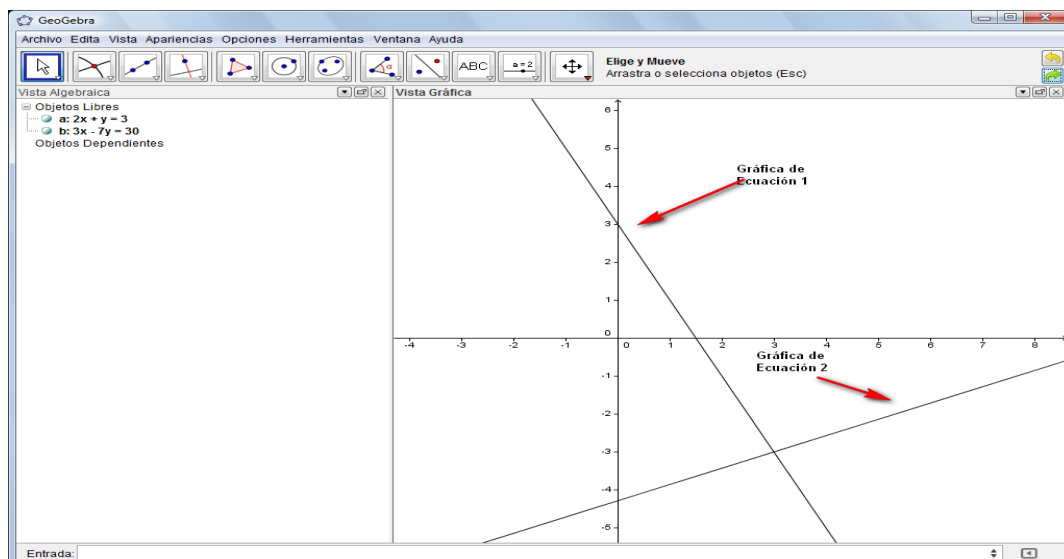


Figura 106: Introducción de ecuaciones con dos incógnitas.

- ✓ Determinar el punto de intersección de ambas gráficas

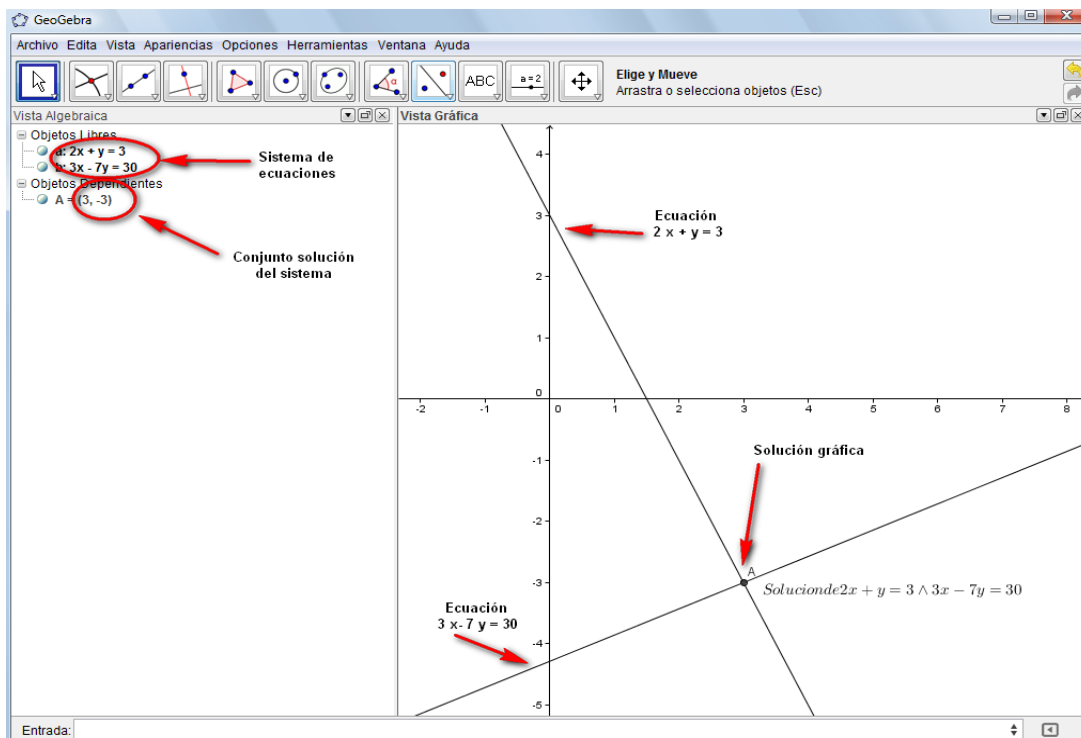


Figura 107: Solución de sistemas de ecuaciones

## Ecuaciones cuadráticas

- Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, es aquella que la incógnita tiene, dos como mayor exponente. La expresión general de una ecuación cuadrática es
- $ax^2 + bx + c = 0$ .

## Solución de ecuaciones cuadráticas

- La ecuación cuadrática se puede resolver manualmente aplicando los siguientes métodos:
  - Completando cuadrados
  - Factoreo
  - Formula general.
- Cuando se resuelve ecuaciones cuadráticas aplicando cualquiera de los métodos mencionados, se pueden tener tres casos distintos: que la ecuación tenga dos soluciones, que tenga una sola ecuación o ninguna en el conjunto de números reales según sea la naturaleza de la ecuación.
- Cuando se resuelven las ecuaciones cuadráticas haciendo uso de GeoGebra, pueden tenerse los mismos casos mencionados anteriormente: pero en este caso resolver una ecuación cuadrática se vuelve muy fácil, pues basta con digitar la ecuación en la Barra de Entrada para que se refleje la o las soluciones en la Vista Gráfica tal como lo muestra en el ejemplo.

**Ejemplo:** Determinar la o las soluciones de la ecuación  $x^2 + 14x - 32 = 0$

Solución:

- ✓ Activar la Vista Algebraica y la Vista Gráfica de GeoGebra.
- ✓ Digitar la ecuación en la Barra de Entrada, así aparecerá, en la Vista Algebraica y la solución en la Vista Gráfica.

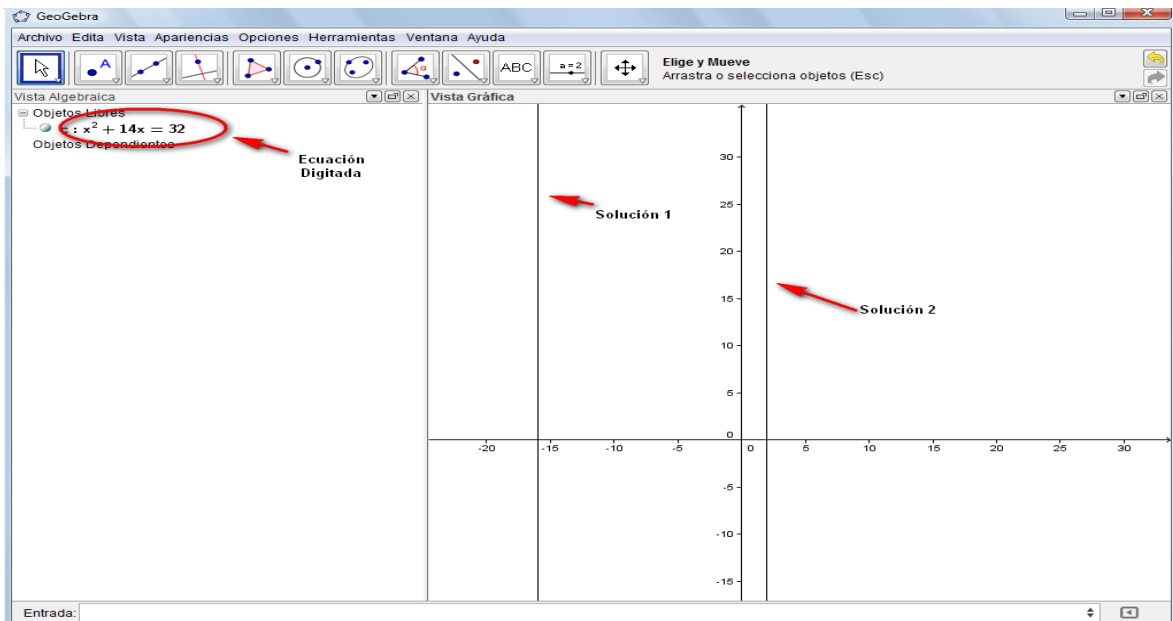


Figura 108: Ecuaciones cuadráticas.

- ✓ Determinar las coordenadas del punto de intersección de la o las gráficas de de la solución con el eje x, esos son las raíces o soluciones de la ecuación.

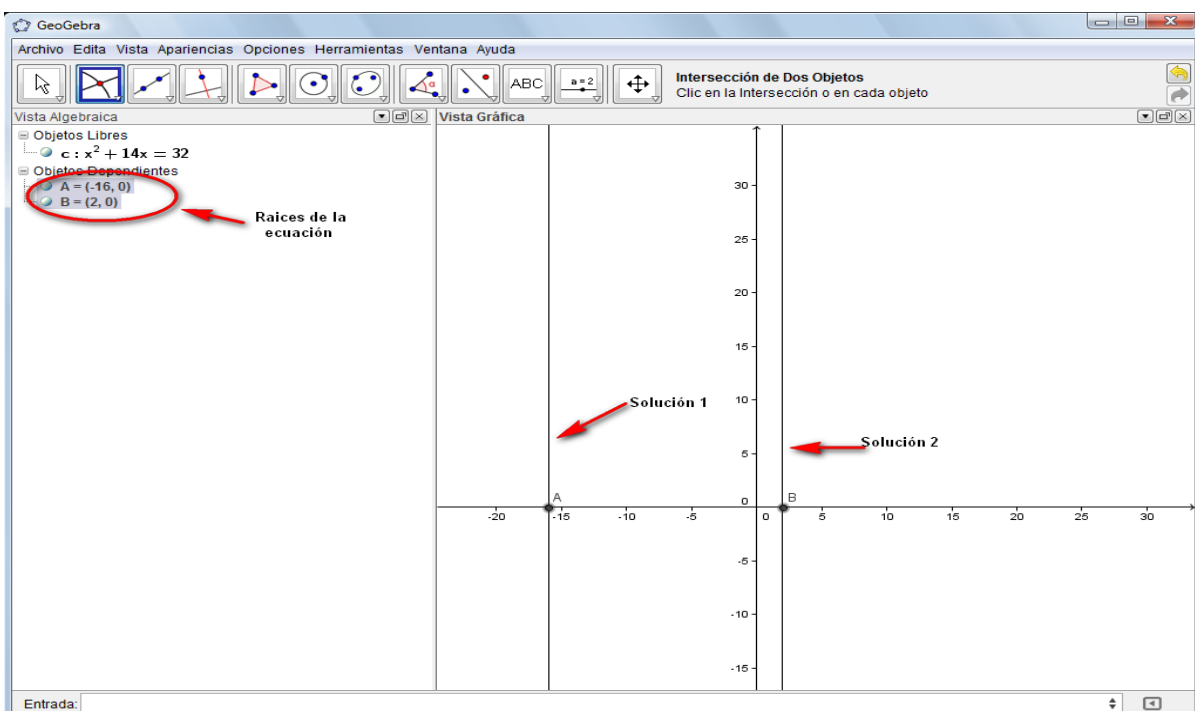


Figura 109: Raíces de ecuación cuadrática.

## Tema 3: Desigualdades

- Una desigualdad es la comparación de dos expresiones algebraicas mediante el uso de cualquiera de los símbolos siguientes:  $>$ ,  $<$ ,  $\leq$  y  $\geq$ .  
Por ejemplo  
 $5x + 12 \leq 13$ ,  $x^2 + 14x - 72 \geq 0$ .
- Los signos  $>$  o  $<$  determinan dos sentidos opuestos en las desigualdades, dependiendo si el primer miembro es mayor o menor que el segundo. Se dice que una desigualdad cambia de sentido, cuando el miembro mayor se convierte en menor o viceversa.
- Las desigualdades condicionales se llaman *inecuaciones*. Sean  $a, b \in \mathbf{R}$  y  $a \neq 0$ , una desigualdad de primer grado en una variable  $x$  se define como:
  - $ax + b > 0$
  - $ax + b \geq 0$
  - $ax + b < 0$
  - $ax + b \leq 0$

### Solución de desigualdades lineales con una incógnita

- Una desigualdad se dice que es lineal o de primer grado cuando la incógnita aparece con un exponente igual a uno. Por ejemplo la desigualdad  
 $5x - 7 > 4$ .
- Para resolver una desigualdad lineal de forma manual se aplican todas las propiedades de las desigualdades, hasta dejar sola la incógnita en el miembro izquierdo de la desigualdad, además es necesario recordar que la solución de una desigualdad no son valores aislados sino intervalos del conjunto de número reales que se ven determinados por el signo de relación que esté presente.
- Para resolver una desigualdad lineal en GeoGebra aplicaremos el siguiente proceso:
  - Activar la Vista Algebraica y la Vista Gráfica de GeoGebra.

- Introducir la desigualdad en la Barra de Entrada.
- Dar Enter, aparecerá la solución en las dos vistas tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo1:** Determine el conjunto solución de  $6x - 9 \leq 7x - 15$

Solución:

- ✓ Activar la Vista Gráfica y la Vista Algebraica.
- ✓ Digitar la desigualdad en la Barra de Entrada.

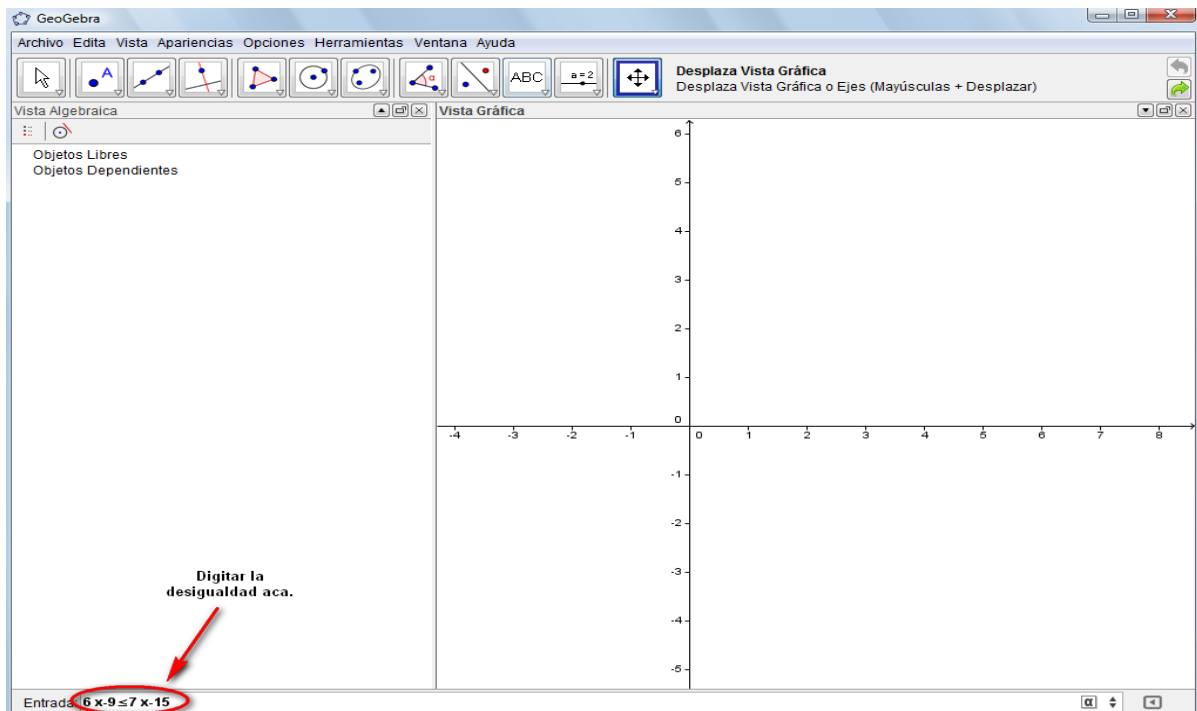


Figura 110: Desigualdad Lineal.

- ✓ Dar, Enter y se tendrá la figura 11

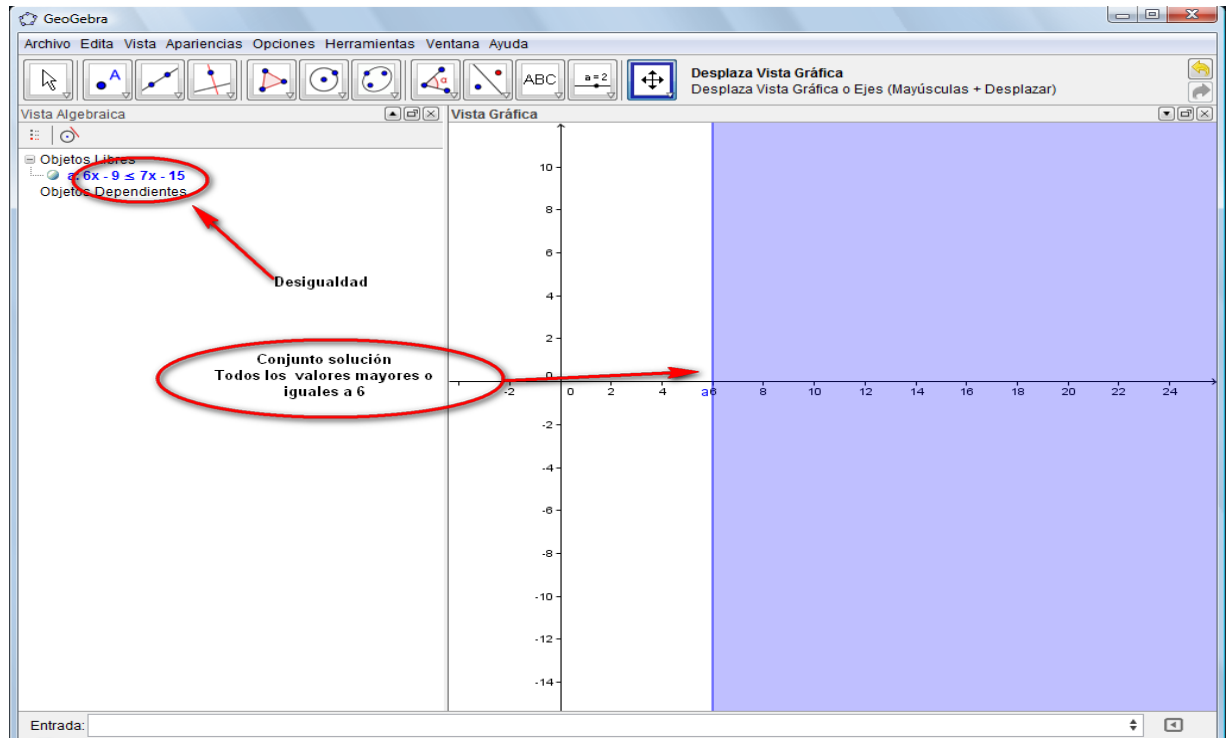


Figura 111: solución desigualdad Lineal.

- ✓ Observe, en la Vista Algebraica aparece la desigualdad que se ha digitado; mientras que en la vista Gráfica aparece representada gráficamente el conjunto solución que corresponde al intervalo que va desde 6 hacia el más infinito.
- ✓ Recuerde que el conjunto solución se representa haciendo uso de los intervalos de número Reales de la manera siguiente:

*Conjunto solución:*  $[6, \infty[$

**Observe que:** El corchete en el extremo que le corresponde al 6 se deja cerrado debido a que la línea límite está continua, lo que indica que el 6 es parte de la solución; es decir satisface la desigualdad. Además se debe recordar que los intervalos al infinito se dejan abiertos en ese extremo.

**Ejemplo 2:** Determine el conjunto solución de  $2x + 3 > 5x + 1$

Solución:

- ✓ Activar la Vista Grafica y la Vista Algebraica.

✓ Digitar la desigualdad en la Barra de Entrada.

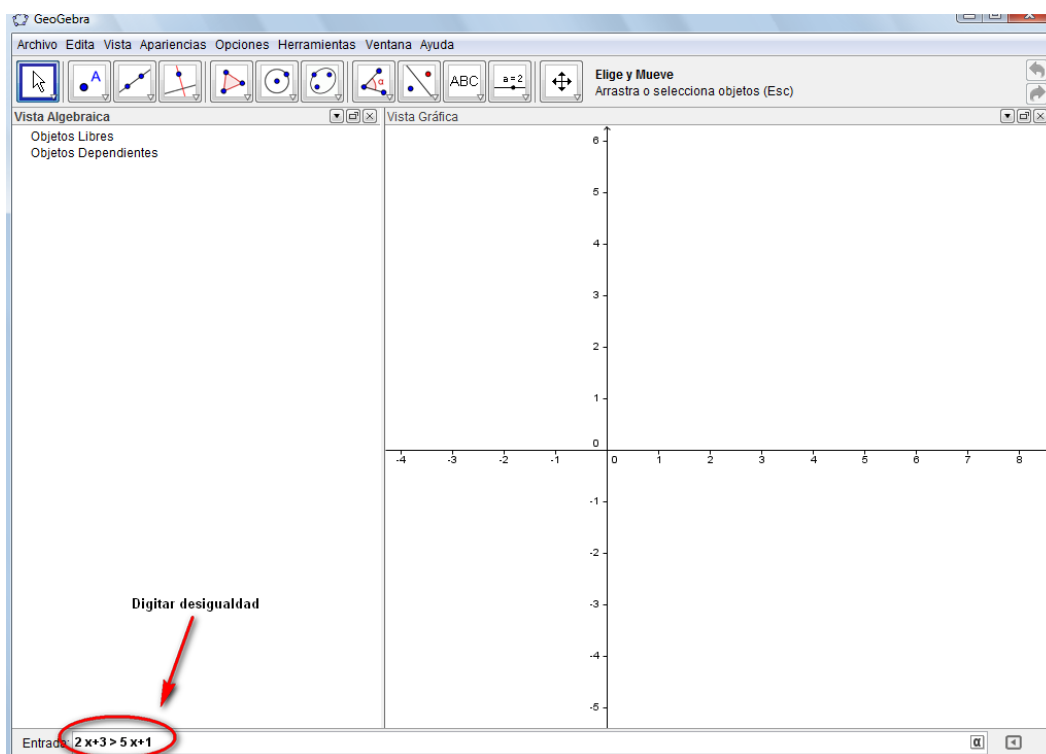


Figura 112:

✓ Dar, Enter y se tendrá la figura 13

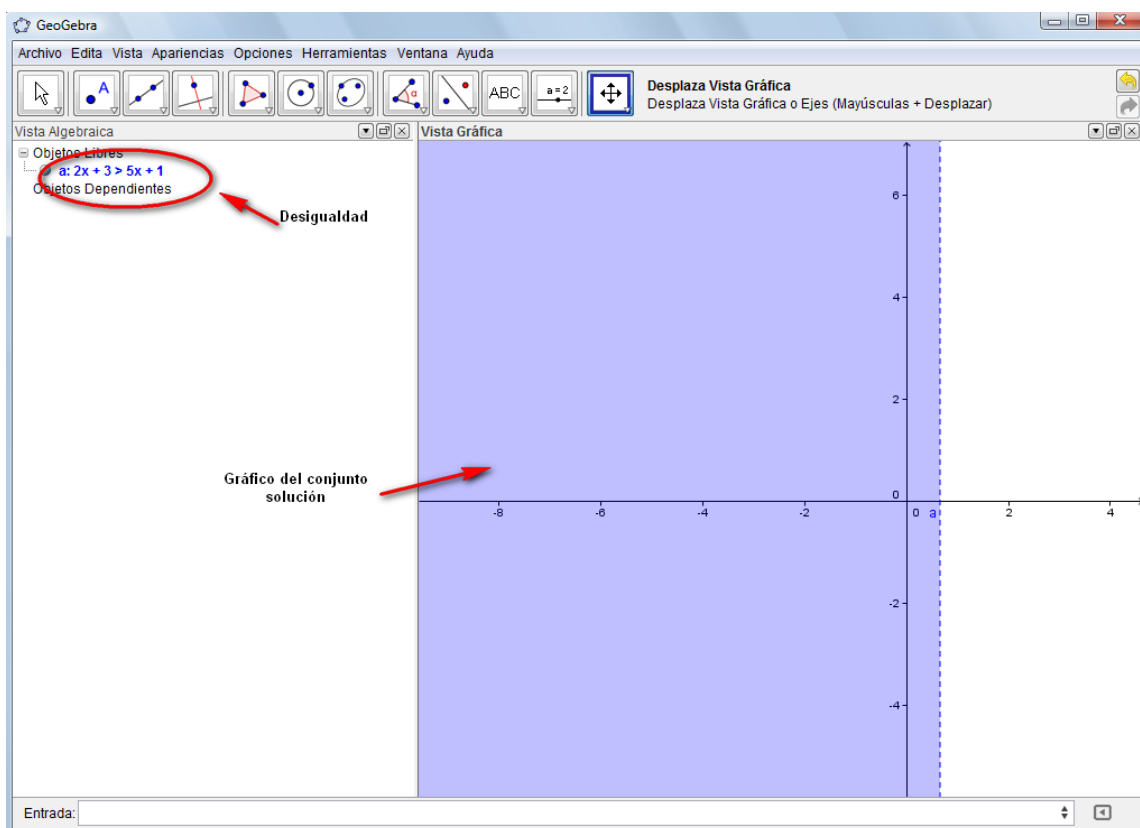


Figura 113: Solución de desigualdad lineal



- ✓ Si el valor límite de la solución no es fácil de identificar, entonces se determina las coordenadas del punto de intersección con el eje X, haciendo uso de la Barra de Herramientas (tal como se estudió en el módulo I y que se puede recordar viendo el video sobre “Solución de desigualdades Lineales”).

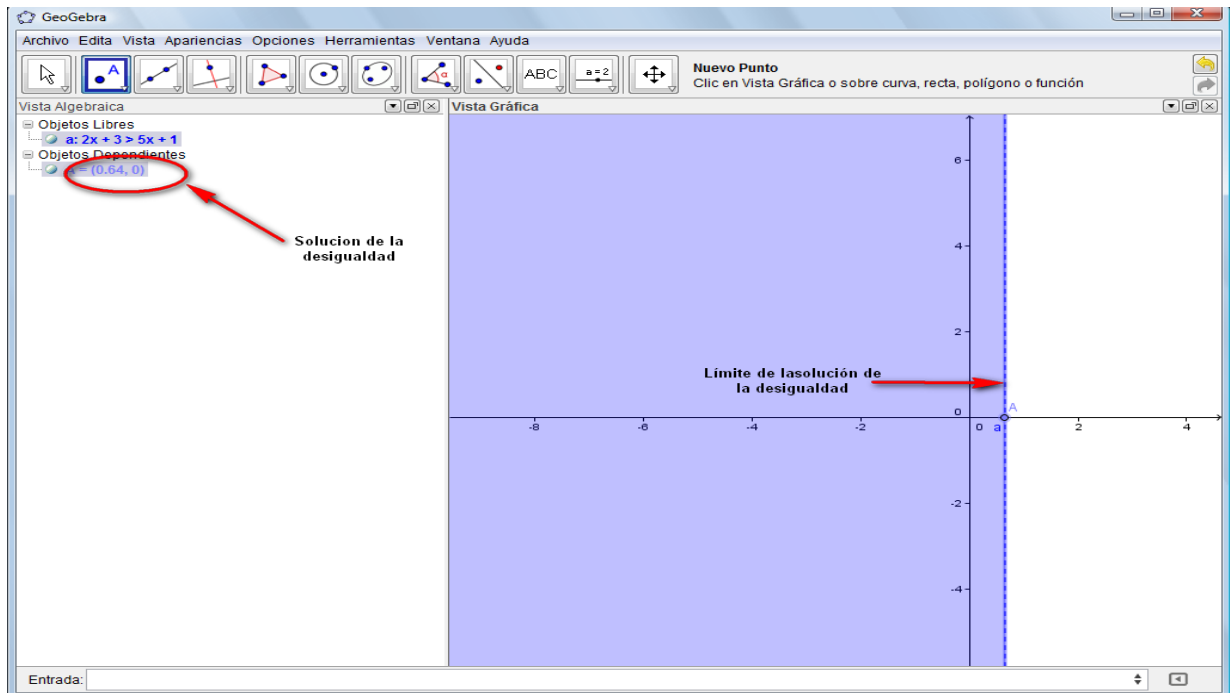


Figura 114: Identificación del límite de la solución

- ✓ Recuerde que el conjunto solución se representa haciendo uso de los intervalos de número Reales de la manera siguiente:  
*Conjunto solución:*  $]-\infty, 0.64[$
- ✓ Si compara este ejercicio con el anterior, entonces podrá darse cuenta que en el gráfico del conjunto solución existe una diferencia y es que en este caso al límite de la solución le corresponde una línea punteada lo cual indica que el valor límite no es parte de la solución, razón por la cual el intervalo en el extremo 0.64 se dejó abierto al igual que en el infinito.

## Solución de desigualdades cuadráticas

Una desigualdad de segundo grado o desigualdad cuadrática, tiene la forma:

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$
- Donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales y  $a \neq 0$ . Su solución generalmente representa un intervalo o la unión de dos intervalos de números reales.
- Para resolver manualmente una desigualdad cuadrática se usan los conceptos de número crítico y número de prueba.
- Un número crítico de la desigualdad mencionada es una raíz real de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ . Si  $r_1$  y  $r_2$  son números críticos, entonces el polinomio  $ax^2 + bx + c$  sólo puede cambiar de signo algebraico en  $r_1$  y  $r_2$ , por lo tanto el signo más o menos de  $ax^2 + bx + c$  será constante en cada uno de los intervalos.
  - De menos infinito a  $r_1$
  - De  $r_1$  a  $r_2$
  - De  $r_2$  a más infinito
- El tipo de intervalos que se use en la solución dependerá del signo de relación usado en la desigualdad tal como se mostró en la solución de desigualdades lineales.

**Ejemplo1:** Determine el conjunto solución de la desigualdad

$$x^2 - 14x + 48 \leq 0$$

Solución:

- ✓ Introducir la desigualdad en la Barra de Entrada

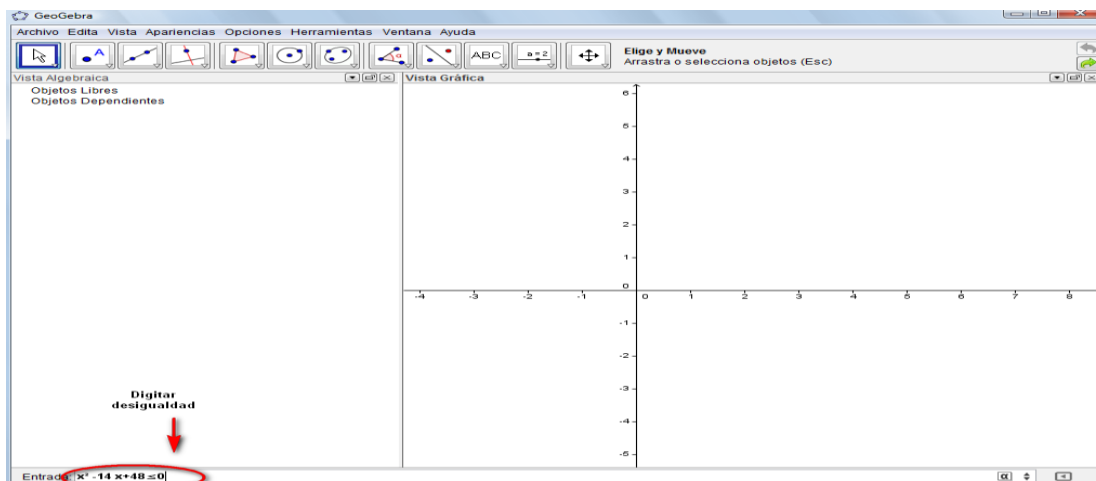


Figura 115: introducción de desigualdad.

- ✓ Presionar la tecla Enter y se tendrá en pantalla en la Vista Gráfica el conjunto solución de la desigualdad, tal como se muestra en la siguiente figura.

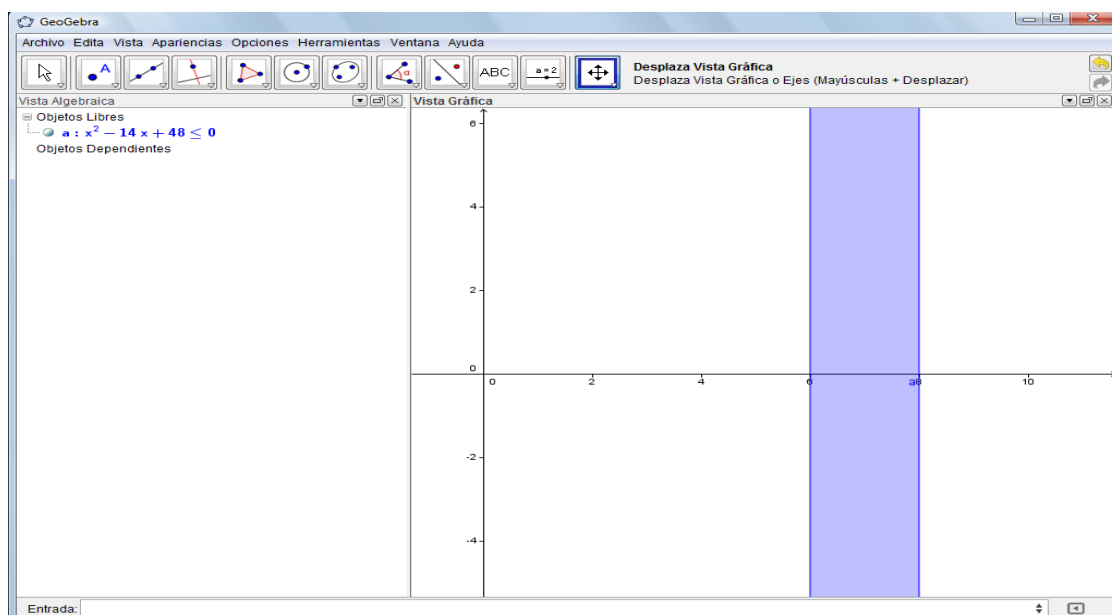


Figura 116: Solución gráfica de  $x^2 - 14x + 48 \leq 0$

- ✓ En caso que no se logre visualizar los valores críticos

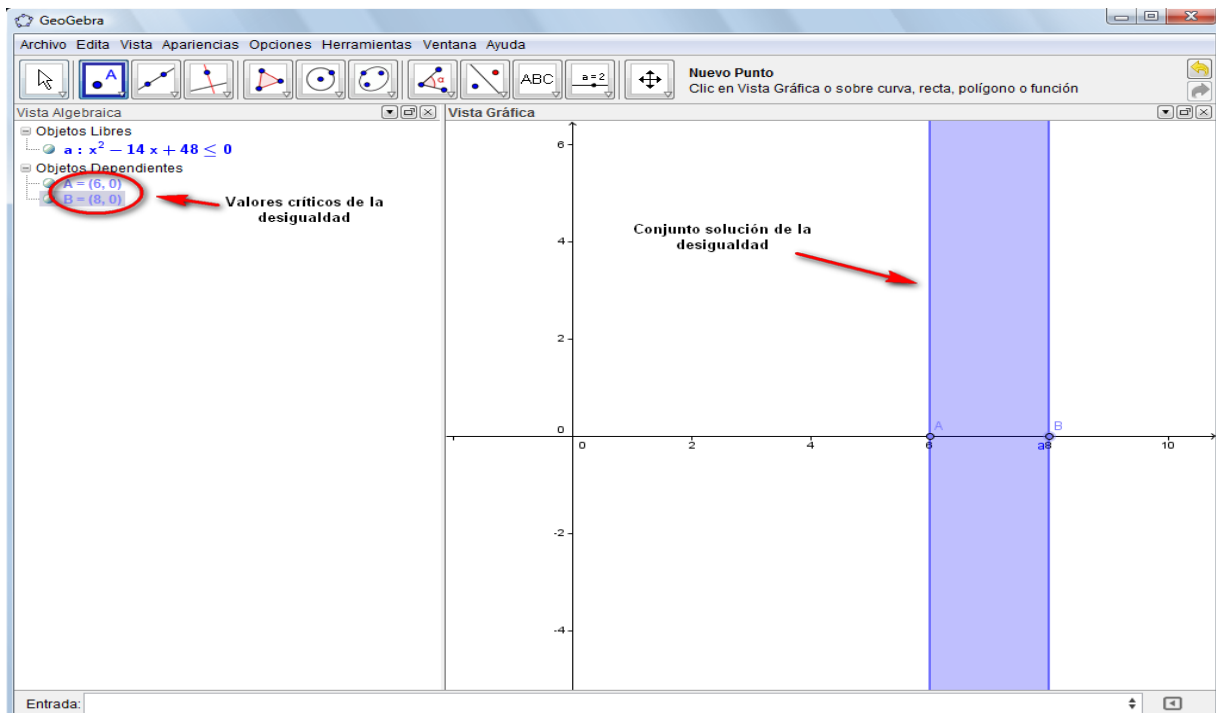


Figura 117; Conjunto solución de la desigualdad.

- ✓ El conjunto solución de la desigualdad es  $[6,8]$ . El conjunto solución se determina

**Ejemplo2:** Determine el conjunto solución de la desigualdad  $x^2 - 64 > 0$

Solución:

- ✓ Introducir la desigualdad en la Barra de Entrada.

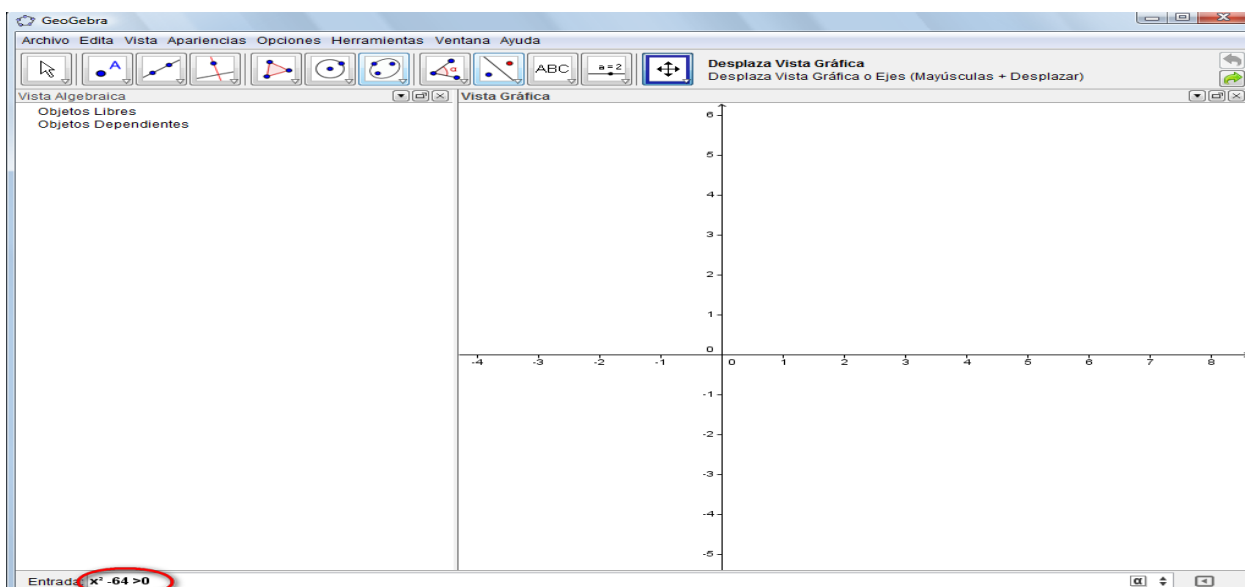


Figura 118: Entrada de inecuación.

- ✓ Presionar la tecla Enter y se tendrá en pantalla en la Vista Gráfica el conjunto solución de la desigualdad, tal como se muestra en la siguiente figura19.

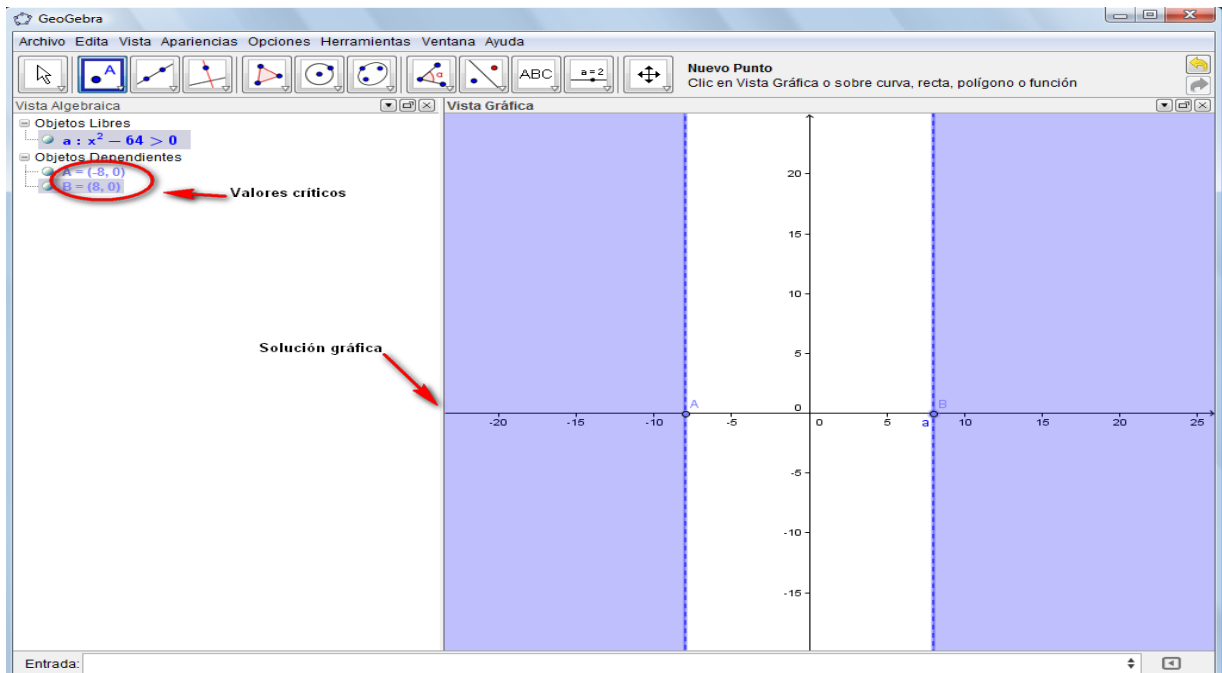


Figura 119: Conjunto solución de  $x^2 - 64 > 0$

- ✓ En caso que no se logre visualizar los valores críticos marcar las respectivas coordenadas.
- ✓ El conjunto solución de  $x^2 - 64 > 0$ , es  $]-\infty, -8[ \cup ]8, \infty[$

# MÓDULO IV

## RELACIONES Y FUNCIONES

## MÓDULO IV

### Introducción

---

En el módulo IV **“RELACIONES Y FUNCIONES”**, se hará una introducción, sobre pares ordenados y su representación gráfica, relaciones introduciendo la expresión algebraica y el respectivo gráfico, funciones polinómicas, valor absoluto, raíz cuadrada; para determinar dominio, rango, gráfico, etc.

Además se trabajará con la herramienta de deslizadores que permitan analizar la variación de las funciones en el plano, cuando se modifica al menos uno de los valores de la expresión algebraica que representa la ley de asignación.

Para realizar las actividades de este módulo se pretende que el participante revise el material del módulo IV: recursos multimedia, plan del módulo, manual; así como también la descripción sobre la Barra de Entrada y su ayuda plasmada en el material multimedia del módulo I.

### Objetivos

---

#### Objetivo General

Graficar relaciones y funciones en el plano cartesiano, introduciendo la respectiva ley de asignación en la Barra de Entrada.

#### Objetivos Específicos

- Practicar la representación gráfica de pares ordenados en el plano.
- Graficar relaciones y funciones en el plano.

- Analizar la variación de las funciones en el plano.

## Tema 1: Relaciones

### Pares ordenados

- Se llama par ordenado, a toda pareja de números escritos de la forma  $(x, y)$ , donde la “ $x$ ” recibe el nombre de primera componente y se grafica sobre el eje horizontal; mientras que la “ $y$ ” se le llama segunda componente y se grafica sobre el eje vertical; por ejemplo  $(2, 5)$ ,  $(-4, 8)$  y  $(-5, -3)$ .
- La representación gráfica de un par ordenado es un punto plano, tal como se muestra a continuación.

**Ejemplo:** Representar gráficamente los pares ordenados siguientes:  $(2, 5)$ ,  $(-4, 6)$ ,  $(-2, -3)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, -4)$  y  $(-3, 0)$

Solución:

- ✓ Activar la Vista Gráfica y la Vista Algebraica.
- ✓ Introducir los pares ordenados desde la Barra de Entrada y se obtendrá la representación gráfica en la Vista Gráfica y las coordenadas en la Vista Algebraica. (ver video sobre gráfica de pares ordenados).



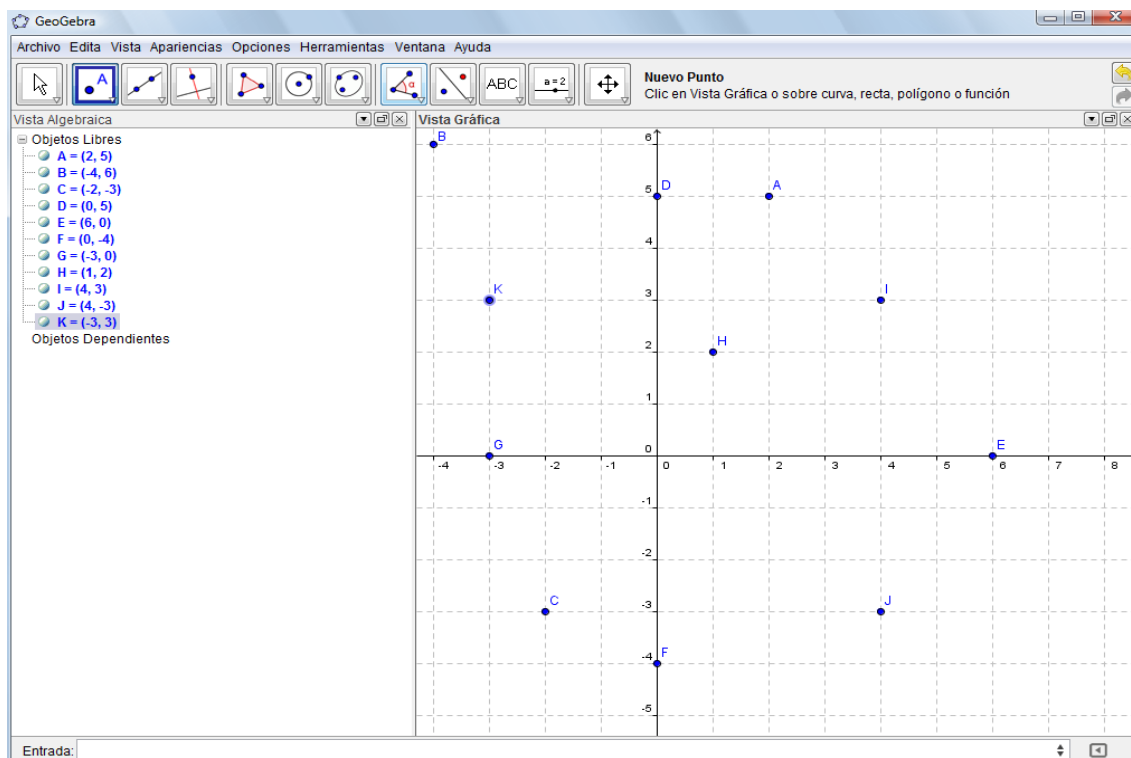


Figura 120: Gráfica de pares ordenados.

### Producto cartesiano.

- Se llama Producto Cartesiano  $A \times B$ , al conjunto de pares ordenados que se forman haciendo corresponder cada elemento de un conjunto A con cada uno de los elementos de un conjunto B, se representa por  $A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$ .

### Gráfica de relaciones.

- Una Relación en los números Reales es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida  $A \subseteq R$  (llamado dominio de la relación) uno o más números reales "y" de un conjunto de llegada  $B \subseteq R$  (llamado contradominio).
- Una gráfica es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  en el plano  $xy$  que satisfacen una relación dada. Para construir el gráfico de una relación haciendo uso de GeoGebra, se puede aplicar cualquiera de los procesos siguientes:

1. Activar Vista Algebraica y Vista Gráfica; luego digitar la ley de asignación en la Barra de entrada y presionar la tecla enter, tal como se ilustra en el ejemplo

**Ejemplo1:** Dada la relación  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1\}$ , determine el gráfico de la relación:

Solución:

- ✓ Activar la Vista Algebraica y la Vista Gráfica; luego digitar  $y = 2x + 1$  en la Barra de Entrada y se tendrá el gráfico que se muestra en la figura (ver también video sobre “Gráfica de Relaciones”)

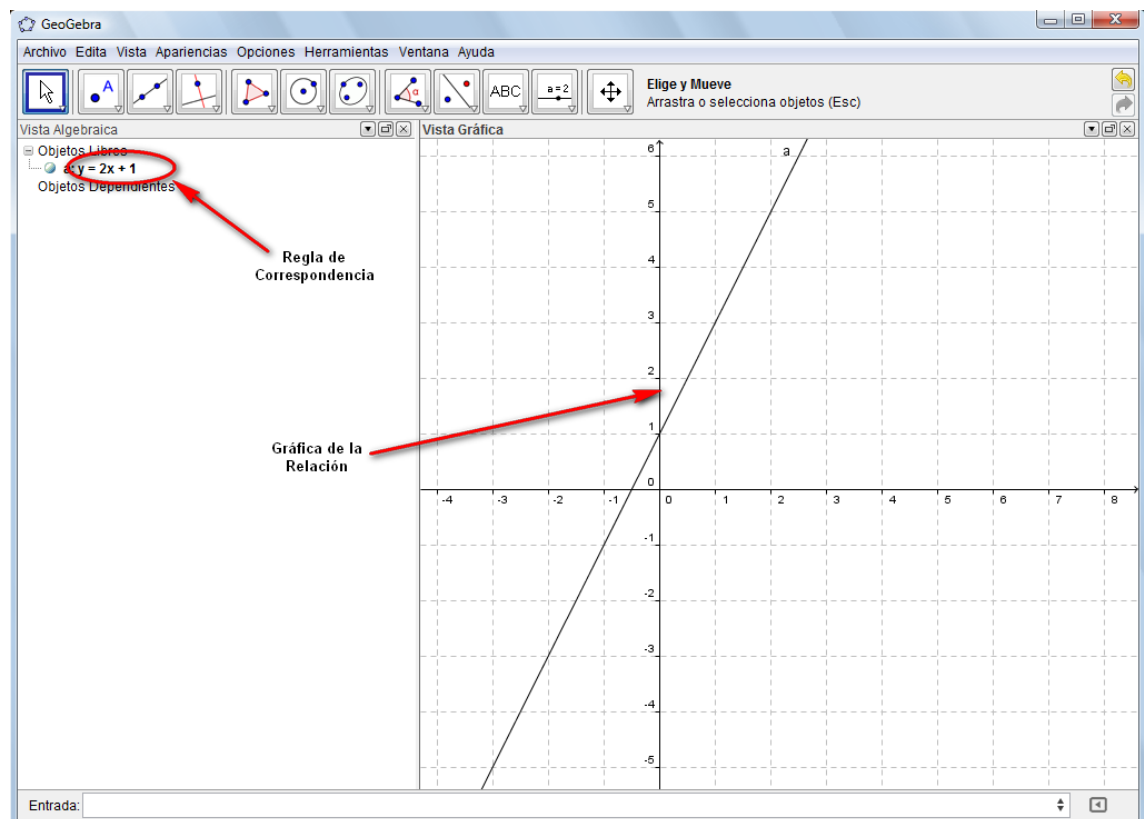


Figura 121: Gráfica de la relación  $y = 2x + 1$

2. En este caso se además del gráfico de la relación también se podrá visualizar el en pantalla la tabla de valores, para ello se realiza el procedimiento siguiente:
  - Activar la Vista Gráfica y la Hoja de Cálculo.

- Construir la tabla de valores en la Hoja de Cálculo

**Ejemplo2:** Dada la relación  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1\}$ , determine el gráfico de la relación:

Solución.

- ✓ Activar la Vista Gráfica y la Hoja de cálculo
- ✓ Digitar valores que se le asignarán a “x” para marcar algunos puntos del gráfico de R, ver figura 3.

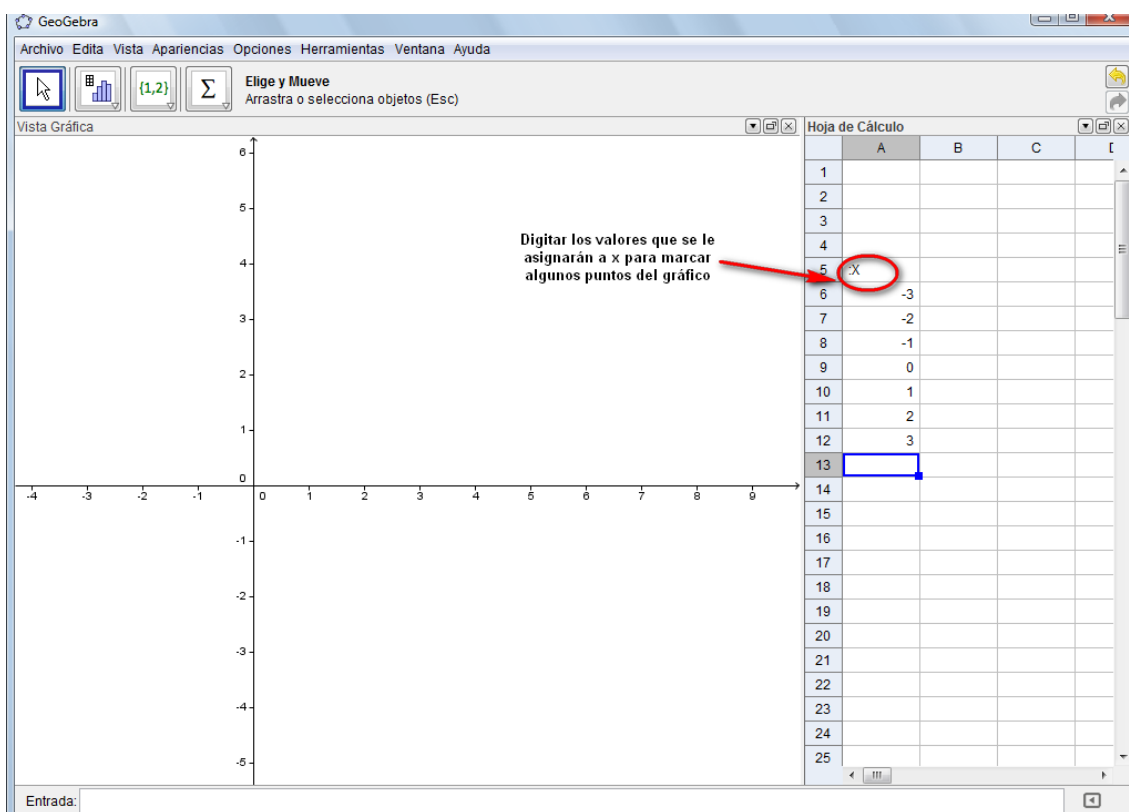


Figura 122: Digitar valores para x.

- ✓ Determinar los valores para y (considerar ley de asignación)

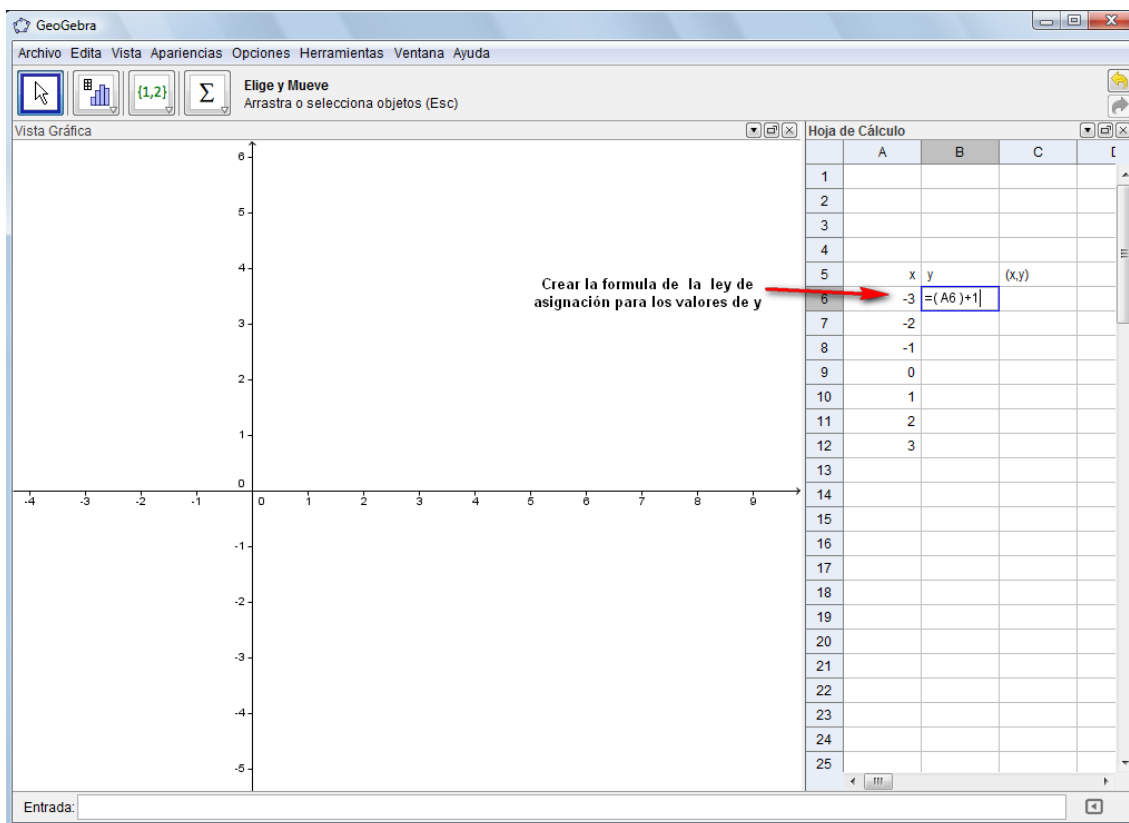


Figura 123: Cálculo de valores de "y"

- ✓ Luego dar enter y activar los valores para las celdas restantes, arrastrando de forma análoga a Excel y se tendrá la figura.

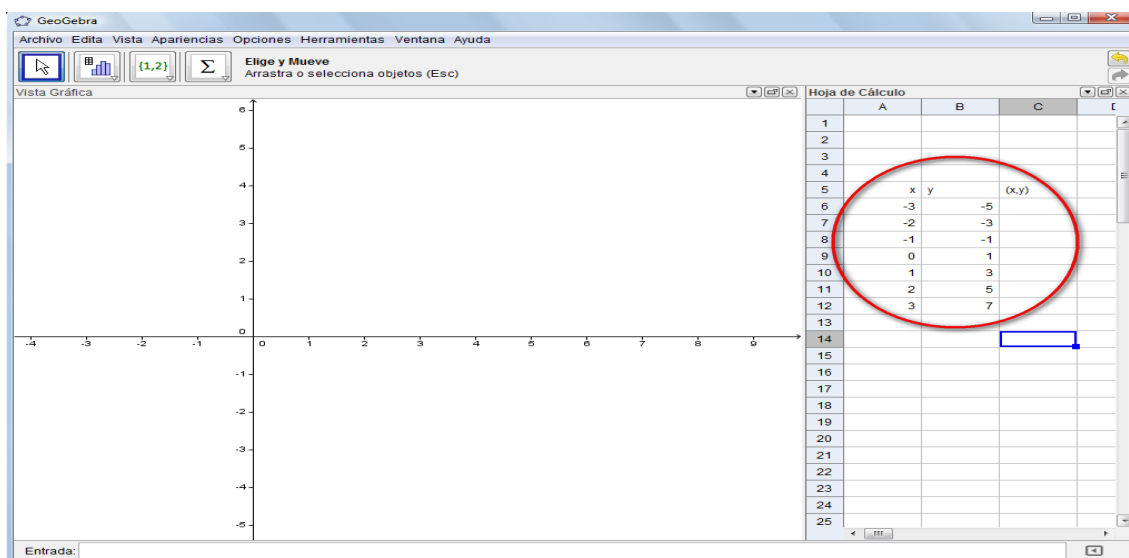


Figura 124: Valores de las coordenadas x e y.

- ✓ Organizar los valores calculados como pares ordenados

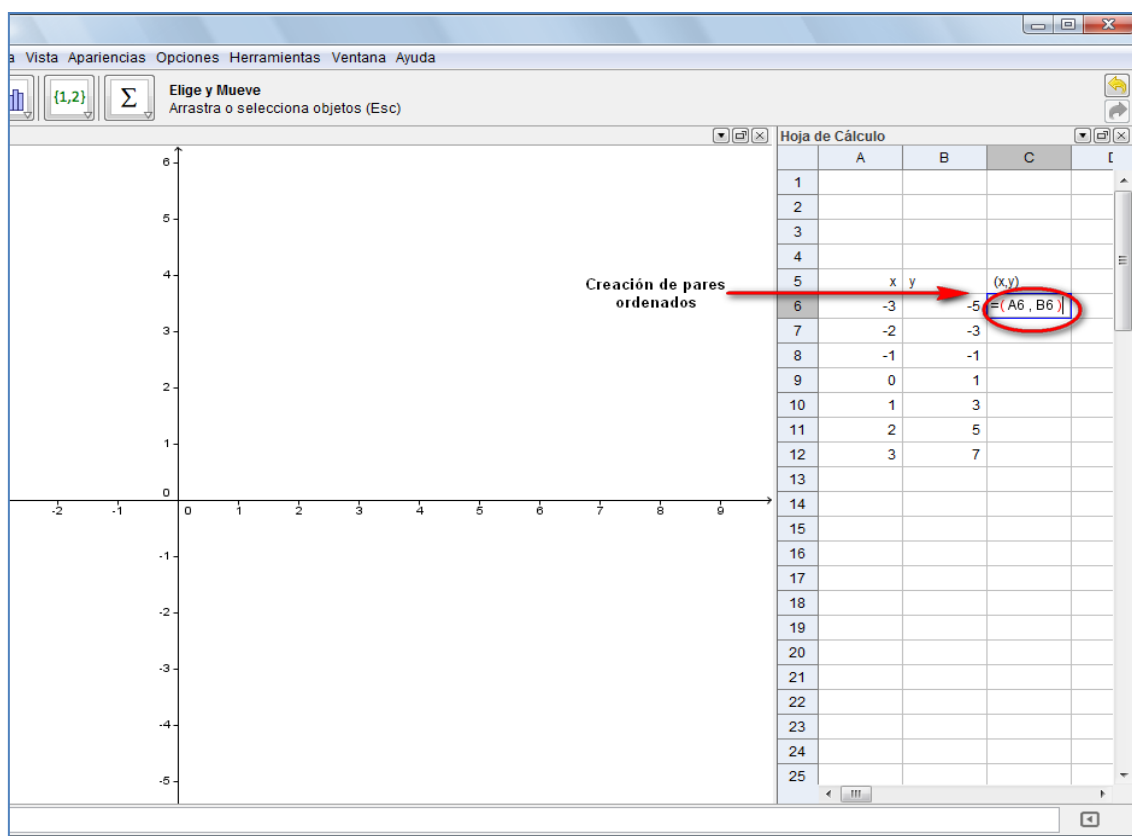


Figura 125: Creación de pares ordenados.

✓ Organizar los pares ordenados.

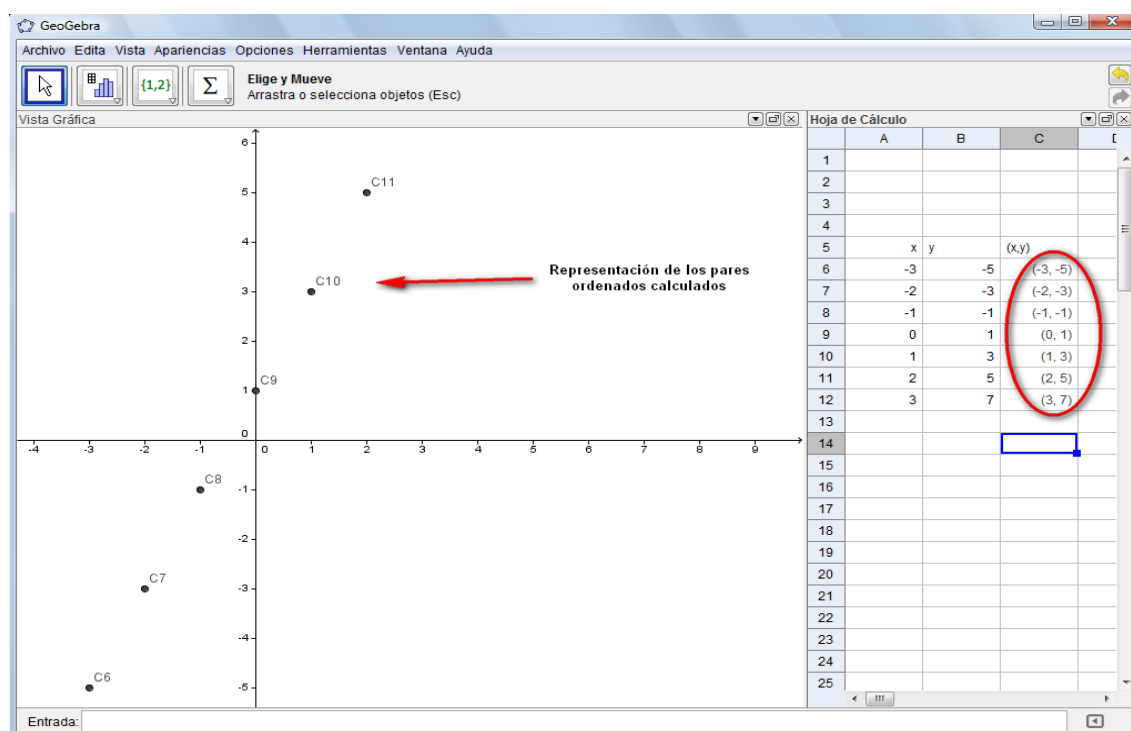


Figura 126: Gráfico de los pares ordenados.

✓ Construir el gráfico completo.

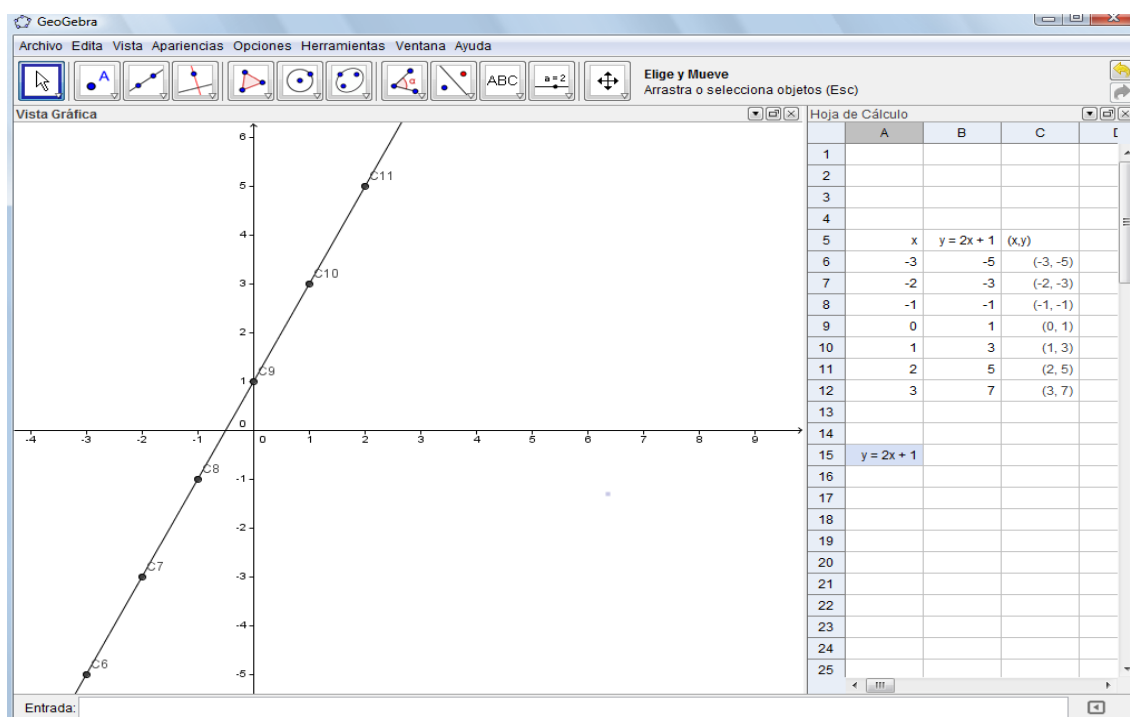


Figura 127: Gráfica de la relación.

✓ Crear la tabla de valores para ser trasladada a Vista Gráfica.

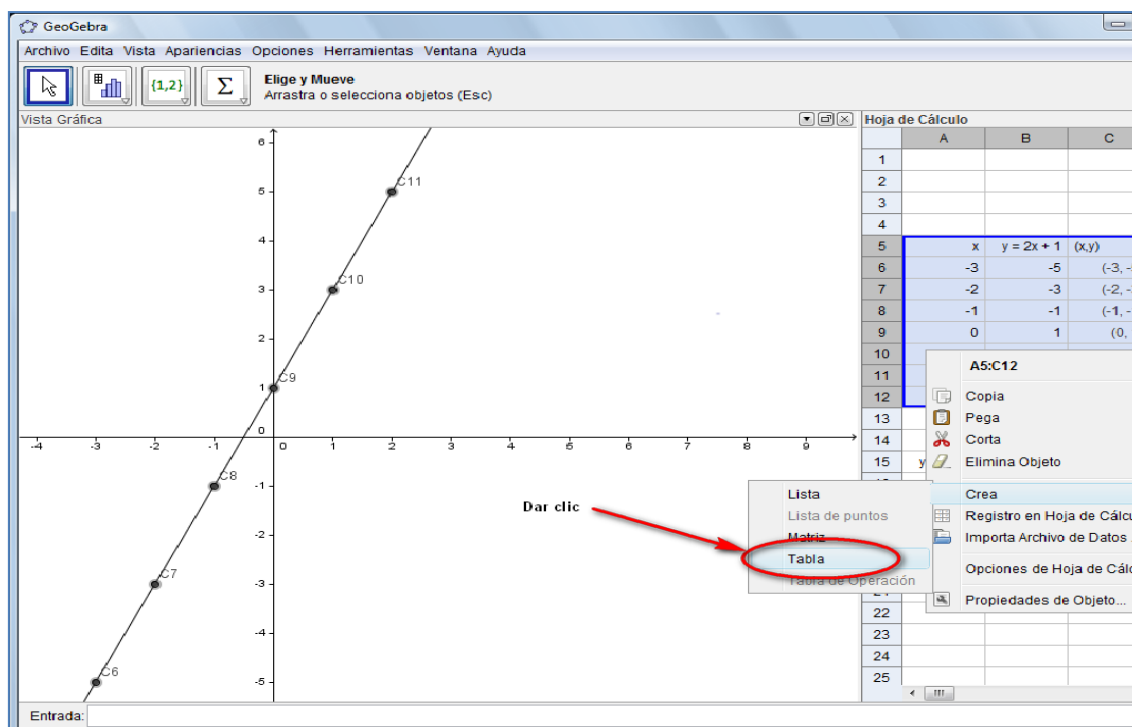


Figura 128: Creación de tabla de valores

- ✓ Exponer tabla de valores en lugar que se estime conveniente.

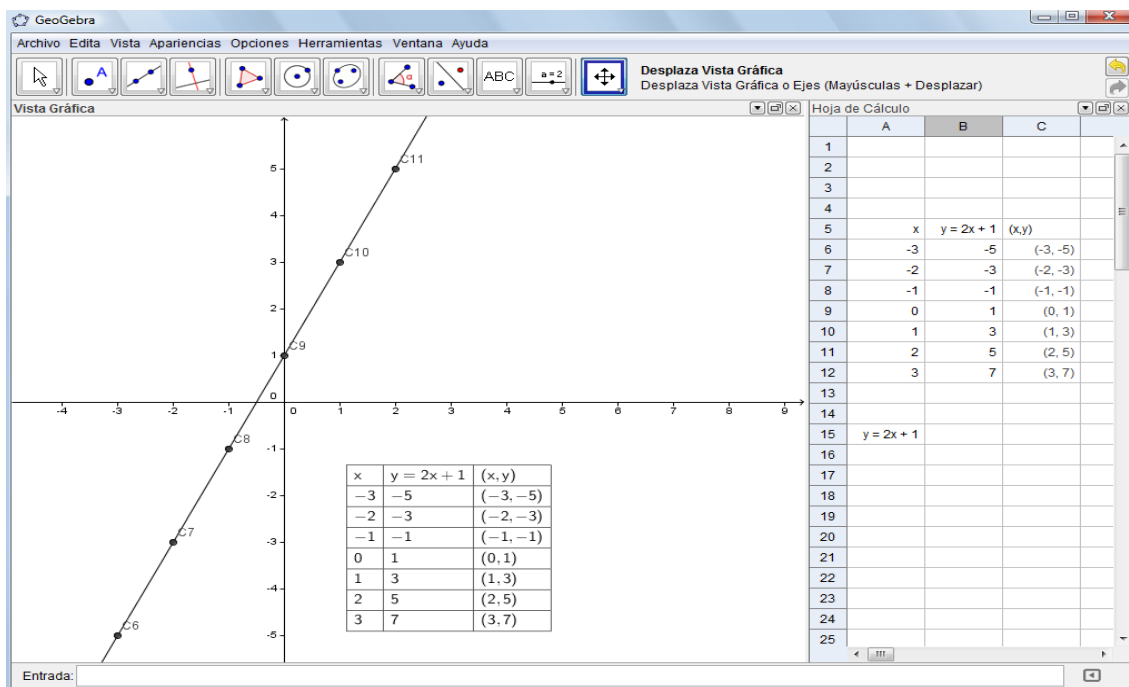


Figura 129: Exposición de tabla de valores

- ✓ Si se desea se puede desactivar la Hoja de Cálculo.

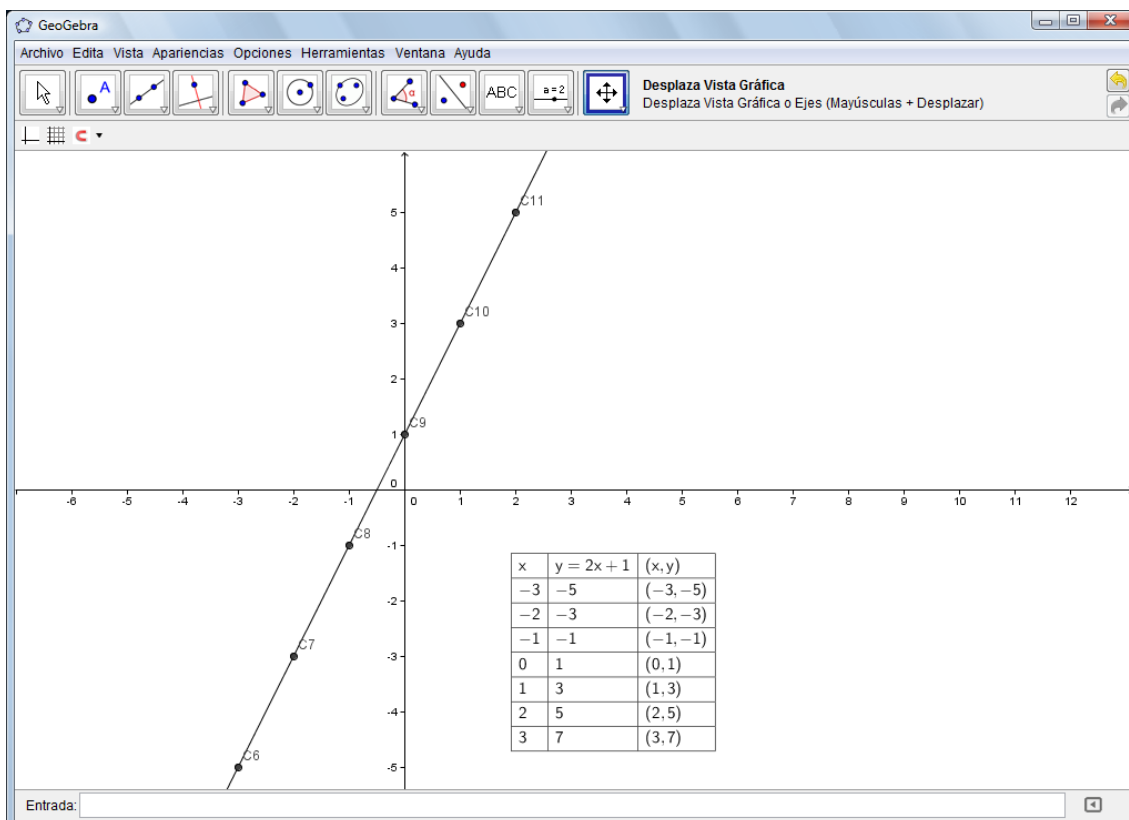


Figura 130: Exposición de tabla y grafica de  $R$ .

**Nota:** Para afianzar el proceso, se sugiere ver video sobre “Grafica de Relaciones”

### Dominio y rango.

Sea  $R$  una relación:

- Se define el dominio de  $R$  como el conjunto formado por las primeras componentes de las parejas ordenadas que pertenecen a  $R$  y lo denotamos como  $D(R)$  o  $dom(R)$ ; mientras que el rango de  $R$  se define como el conjunto formado por las segundas componentes de las parejas ordenadas que pertenecen a  $R$  y lo denotamos  $r(R)$  o  $ran(R)$ .

**Ejemplo:** para la relación graficada en el numeral anterior

- El dominio es el conjunto de números reales, pues “ $x$ ” puede tomar cualquier valor
- El rango también es el conjunto de números reales, pues para todo “ $x$ ” del dominio existe un “ $y$ ” en el recorrido.



- Por tanto  $D(R) = \text{Reales}$  y  $r(R) = \text{Reales}$

## Interceptos

- Un punto **A** es un intercepto en “ $x$ ” de una relación si el punto  $(a, 0)$  pertenece a su gráfica.

**Nota:** Todos los puntos donde  $y$  es igual a cero pertenecen al eje de “ $x$ ”. Como consecuencia, si el punto  $(a, 0)$  pertenece a la gráfica y al eje “ $x$ ”, entonces es un intercepto con el eje de “ $x$ ” o un intercepto en “ $x$ ”.

- Un punto **A** es un intercepto en “ $y$ ” de una relación si el punto  $(0, a)$  pertenece a su gráfica.

**Nota:** Todos los puntos donde  $x$  es igual a cero pertenecen al eje de “ $y$ ”. Como consecuencia, si el punto  $(0, a)$  pertenece a la gráfica y al eje de “ $y$ ” entonces es un intercepto con el eje de “ $y$ ” o un intercepto en “ $y$ ”.

**Ejemplo:** para la relación  $y = 2x + 1$ , graficada en el ejemplo anterior, se pueden determinar el intercepto de  $R$  con cada uno de los ejes cartesianos haciendo uso de la opción Intersección de dos Objetos de la Barra de Herramientas, que se encuentra indicada en la figura 12.



Figura 131: Determinación de intercepto.

- ✓ Seleccionar el gráfico de la relación y los ejes, tal como se muestra en la figura 13.

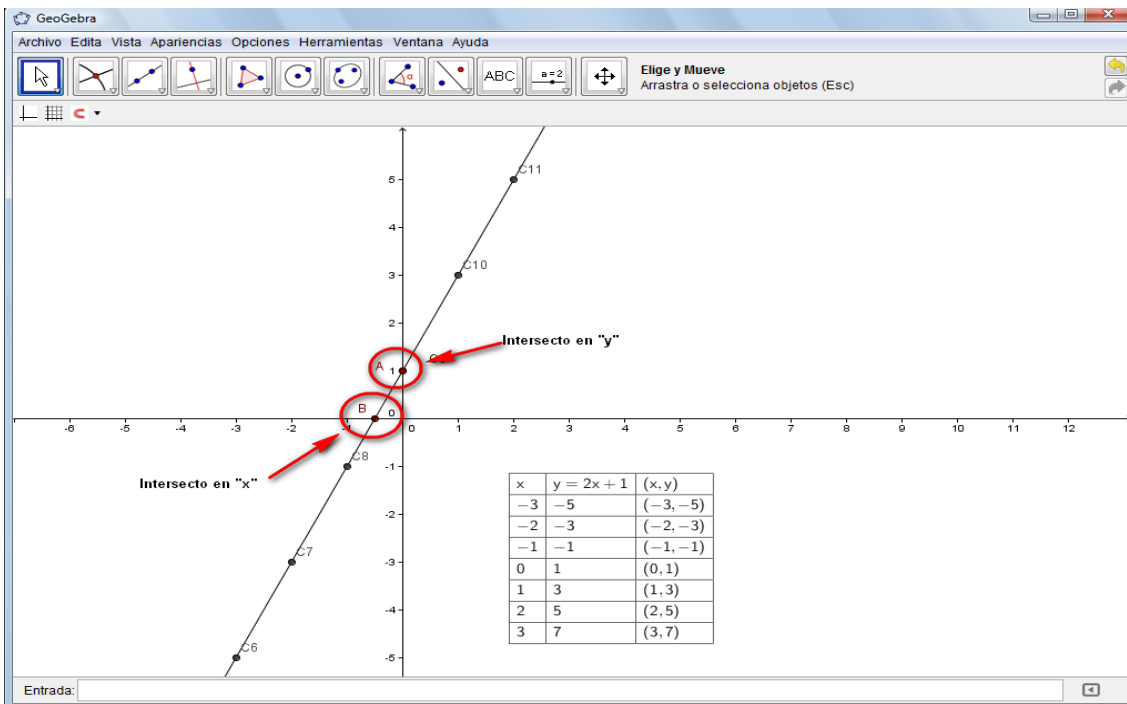


Figura 132: Intercepto de R con los ejes "x" y "y"

- ✓ Activar la Vista Algebraica, si se desea visualizar las coordenadas del intercepto de R con cada uno de los ejes.

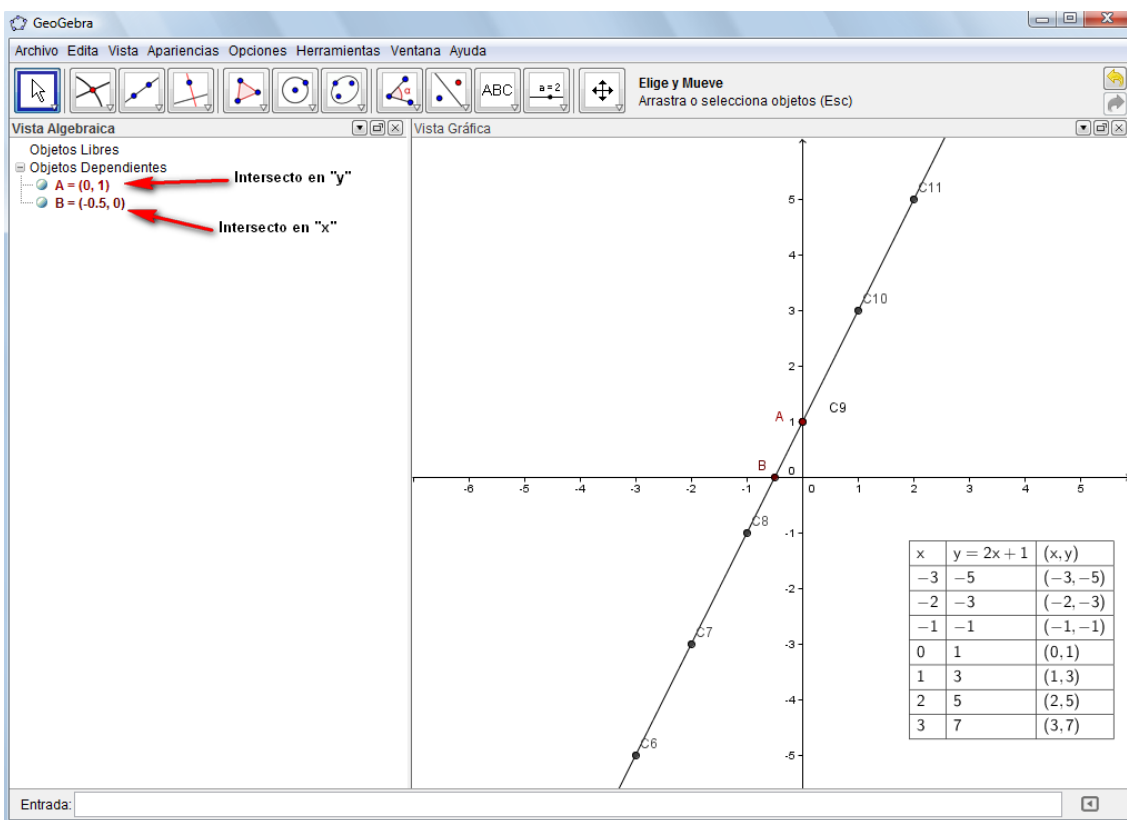


Figura 133: coordenadas del intercepto de R.

## Tema 2: Funciones.

- Una función real de variable real, es una regla de correspondencia que asocia a cada número real “ $x$ ” de un conjunto de partida  $A \subseteq R$  un único número real “ $f(x)$ ” de un conjunto de llegada  $B \subseteq R$ .
- Las funciones son un subconjunto de las relaciones; es decir todas las funciones son relaciones; pero no todas las relaciones son funciones. Las funciones al igual que las relaciones se pueden representar de manera verbal, algebraica, tabla de valores y gráfica.
- Una regla de correspondencia de una función real de variable real generalmente se da por una o más fórmulas matemáticas y se representa con  $f(x)$ .

### Gráfica de funciones

- Para construir el gráfico de una función se procede de manera análoga a las relaciones; por tanto si se desea construir el gráfico de una función haciendo uso de GeoGebra, se puede aplicar cualquiera de los procesos descritos para las relaciones en el apartado anterior.

### Dominio y rango

- Dominio de una función se representa por  $D(f)$  y se define como el conjunto de elementos para los que la función esta definida.
- Rango de una función se representa por  $R(x)$  y se define como el conjunto de elementos formado por las imágenes de los elementos del dominio.

### Diferencia entre relaciones y funciones

- Una función es una relación entre los elementos de un conjunto A con los de otro conjunto B donde a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y sólo uno del conjunto B. Además toda función es una relación, pero no toda relación es función.
- Para identificar si una gráfica corresponde a una función, basta con trazar rectas paralelas al eje  $y$  sobre el gráfico y si es cortado en más de un punto, entonces no es función.

### Tipos de funciones

- Según la expresión algebraica que represente la regla de correspondencia de una función, las funciones reciben nombres particulares tales como: polinómicas, Raíz cuadrada, valor absoluto, etc.
- Las funciones polinómicas se clasifican en:

- Constantes: la regla de correspondencia tiene la forma

$$f(x) = a_0$$

- Lineales: la regla de correspondencia tiene la forma

$$f(x) = a_1x + a_0$$

- Cuadráticas: la regla de correspondencia tiene la forma

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- Cúbicas: la regla de correspondencia tiene la forma

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

**Ejemplo1:** Dada la regla de formación  $F(x) = 2x^3 - 6x + 12$ , realice lo siguiente:

- Construya el gráfico
- Determine si corresponde a una función o simplemente es una relación
- Determine intercepto con el eje  $x$  con el eje  $y$  si es que posee.
- Identifique el dominio y el rango
- Según la regla de formación, ¿Qué tipo de función es?

Solución:

- Introducir la regla de formación desde la Barra de Entrada.

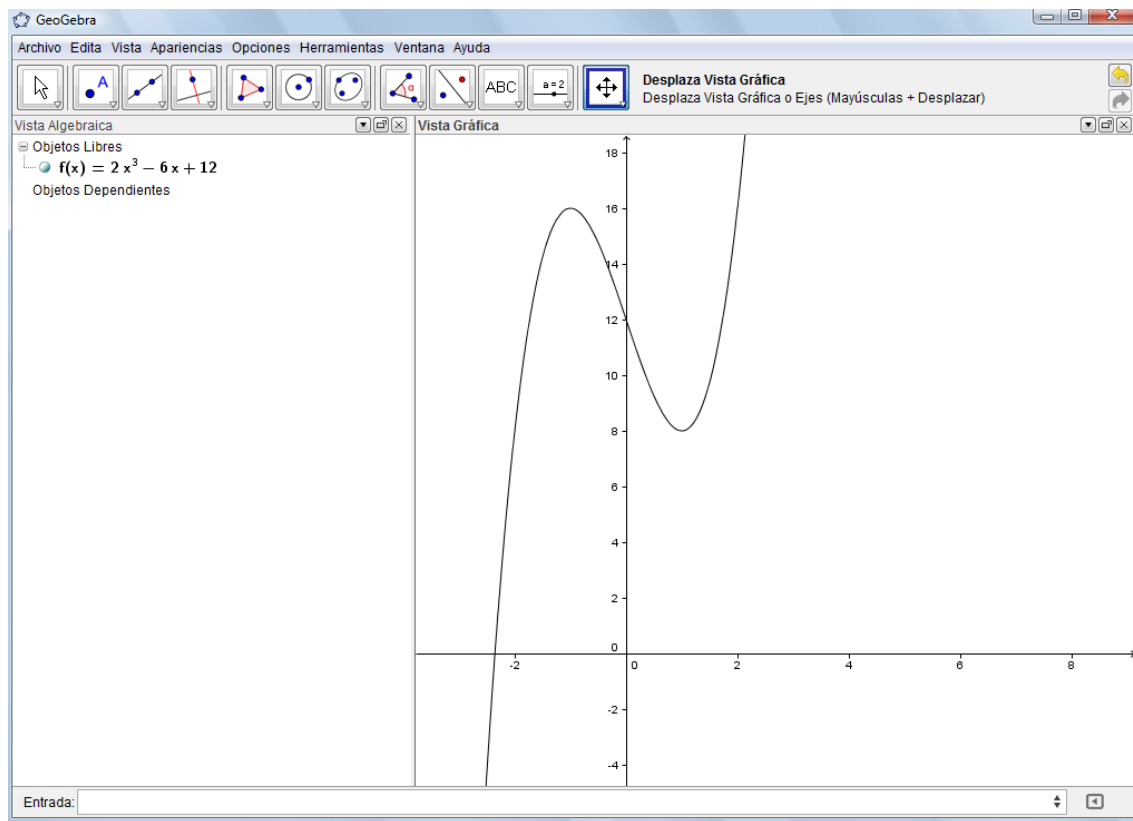


Figura 134: Gráfico de  $f(x)$

- b. Para determinar si el grafico corresponde o no a una función, trazamos rectas paralelas al eje x sobre el grafico, tal como lo muestra la figura 16.

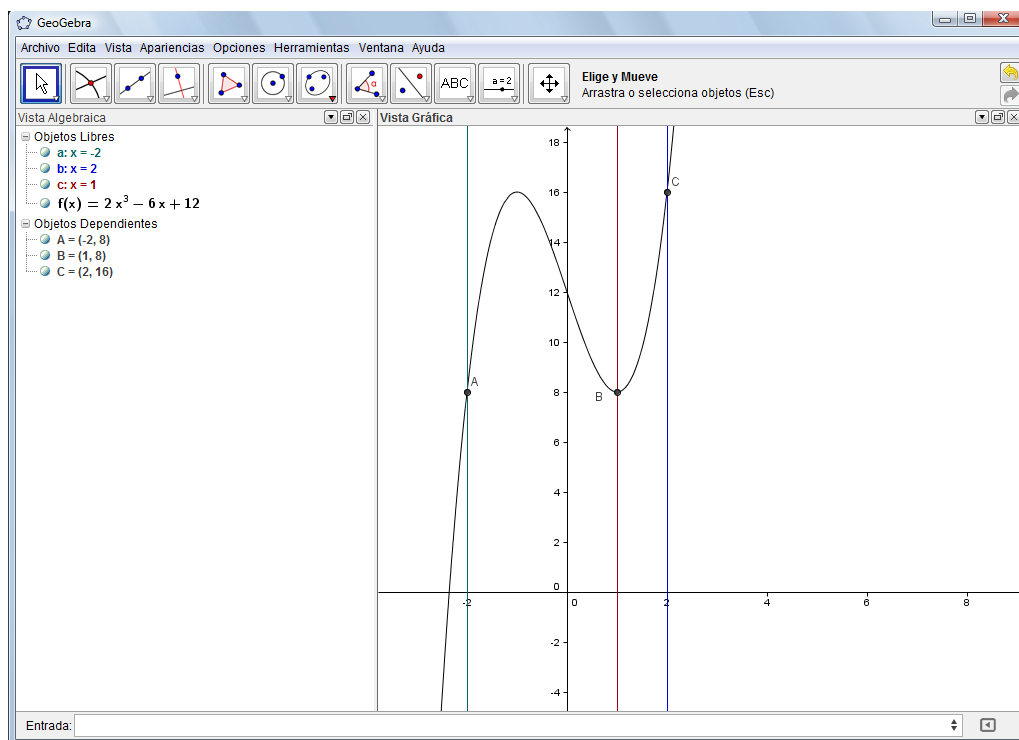


Figura 135: Trazado de rectas paralelas al eje y.

- ✓ Como al trazar rectas paralelas al eje y estas cortan al gráfico de  $f(x)$  en un solo punto, entonces es una función.
- c. Para determinar el intercepto del gráfico con cada uno de los ejes, se activa la opción Intersección de Dos Objetos de la Barra de Herramientas; luego seleccionamos :
- ✓ El eje "x" y  $f(x)$
  - ✓ El eje "y" y  $f(x)$

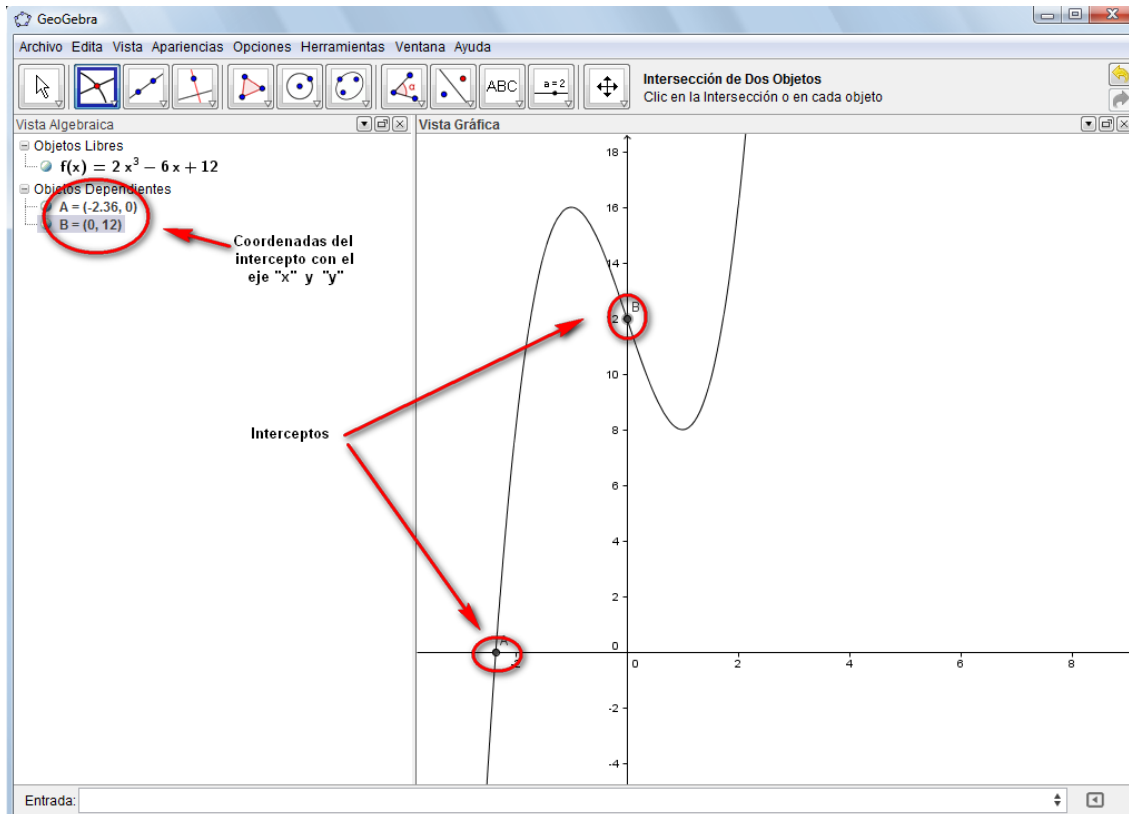


Figura 136 Intercepto de  $f(x)$  con el eje  $x$  y el eje  $y$ .

d. Identifique el dominio y el rango

Como  $x$  puede tomar cualquier valor, entonces diremos que  $D(f) = \text{Reales}$  y como cada vez que se sustituye un  $x$  se obtiene un valor para  $y$ , entonces  $R(f) = \text{Reales}$ .

e. Según la regla de formación, ¿Qué tipo de función es?

Como el exponente mayor con que aparece la  $x$  es 3 entonces se dice que: la función es una función cúbica.

Nota: Ver video “Gráfico de funciones”

## Tema 3: Variación de las funciones en el plano

### Creación de deslizadores

- Para crear un deslizador se activa la opción Deslizador de la caja



, de la Barra de Herramientas



tal como se muestra en la figura18

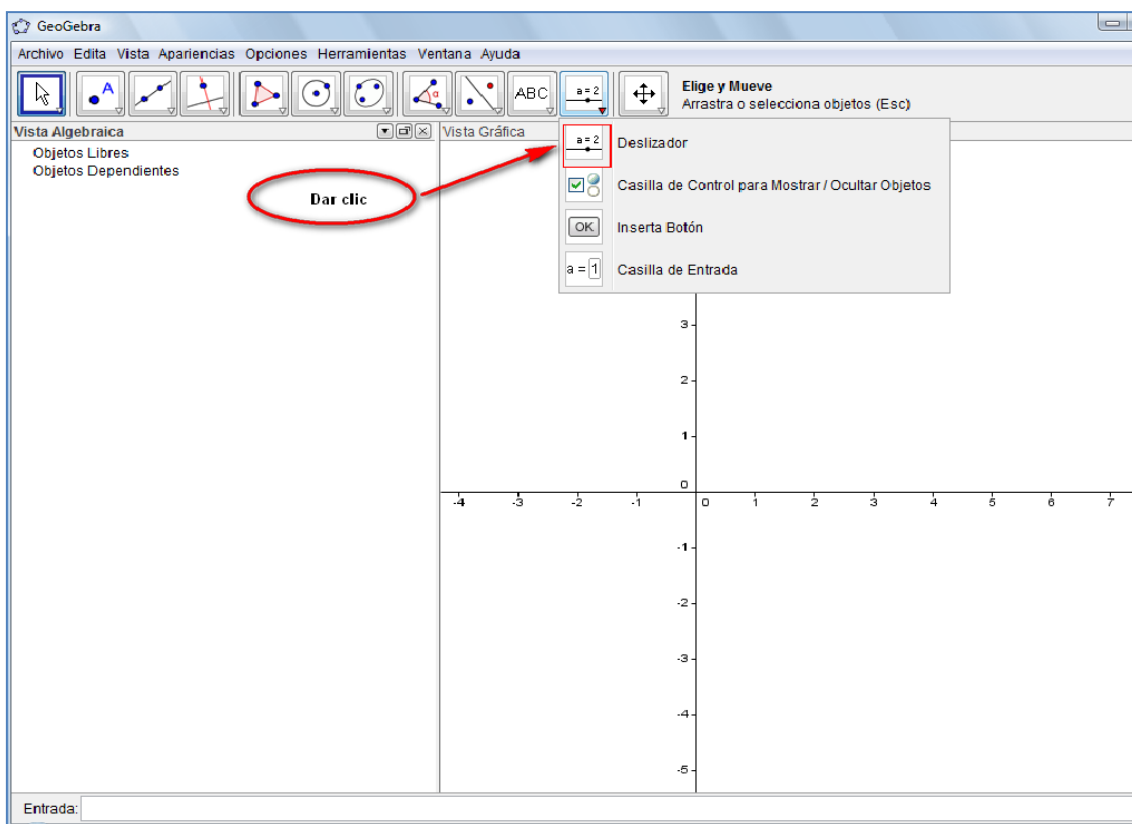


Figura 137:

- Dar clic, en el lugar donde se va a activar el deslizador y aparecerá un cuadro de dialogo donde deberá seleccionar:
  - ✓ Tipo de deslizador si corresponderá a ángulos, cantidades enteras o a un número cualquiera.



- ✓ Se debe asignar un nombre, que puede ser cualquier letra de nuestro alfabeto o cualquier símbolo (puede auxiliarse de la ayuda que se activa a la derecha de la Barra de Nombre)
- ✓ Activar el rango o intervalo en que tomará valores el deslizador, GeoGebra activa de manera predeterminada el intervalo de  $[-5, 5]$  que puede ser modificado según se estime conveniente.
- ✓ Luego de haber seleccionado el intervalo es necesario definir la escala con se desea que vaya incrementado, para ello tenemos la Barra Incremento, que de forma predeterminada es activada con una décima (0.1); pero que puede ser modificada según se desee.

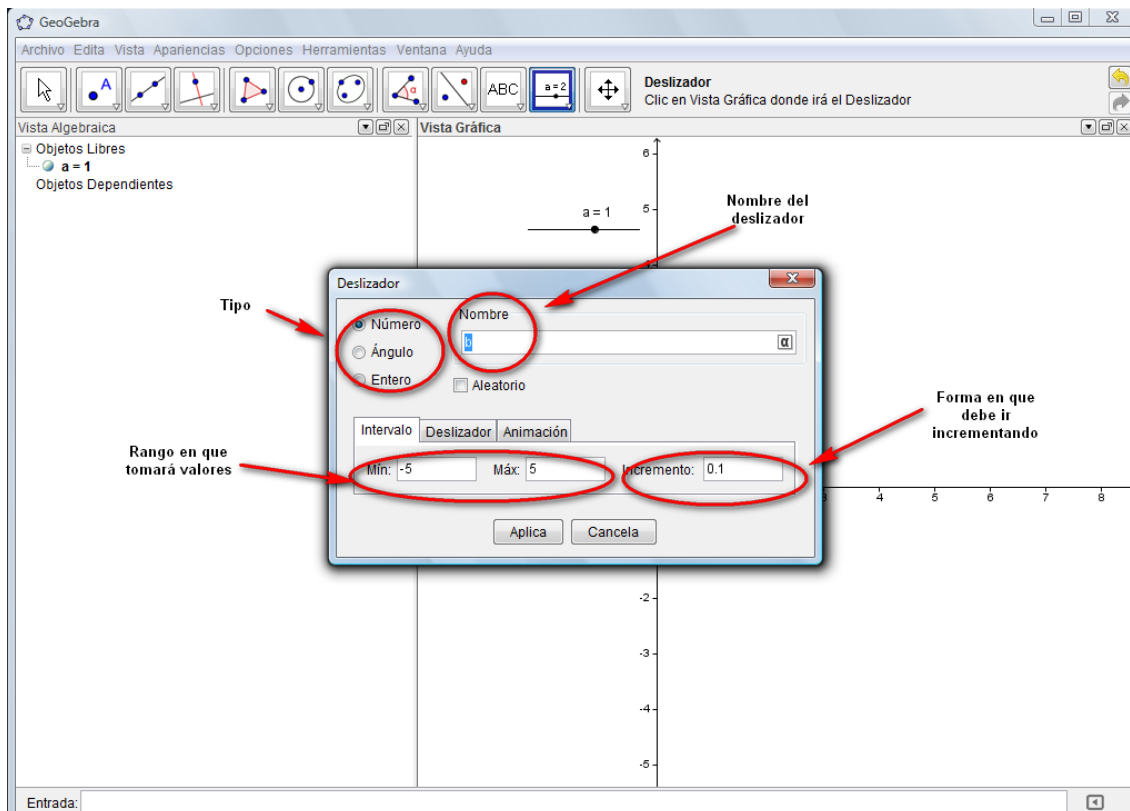


Figura 138 Tipo de deslizador.

- ✓ Seleccionar la forma de ubicación del deslizador esta puede ser horizontal o vertical según convenga (ver figura20).

- ✓ Si se desea se puede activar el orden aleatorio para los valores que pueden tomar los deslizadores, desde la opción aleatorio, que se muestra en la figura 20.

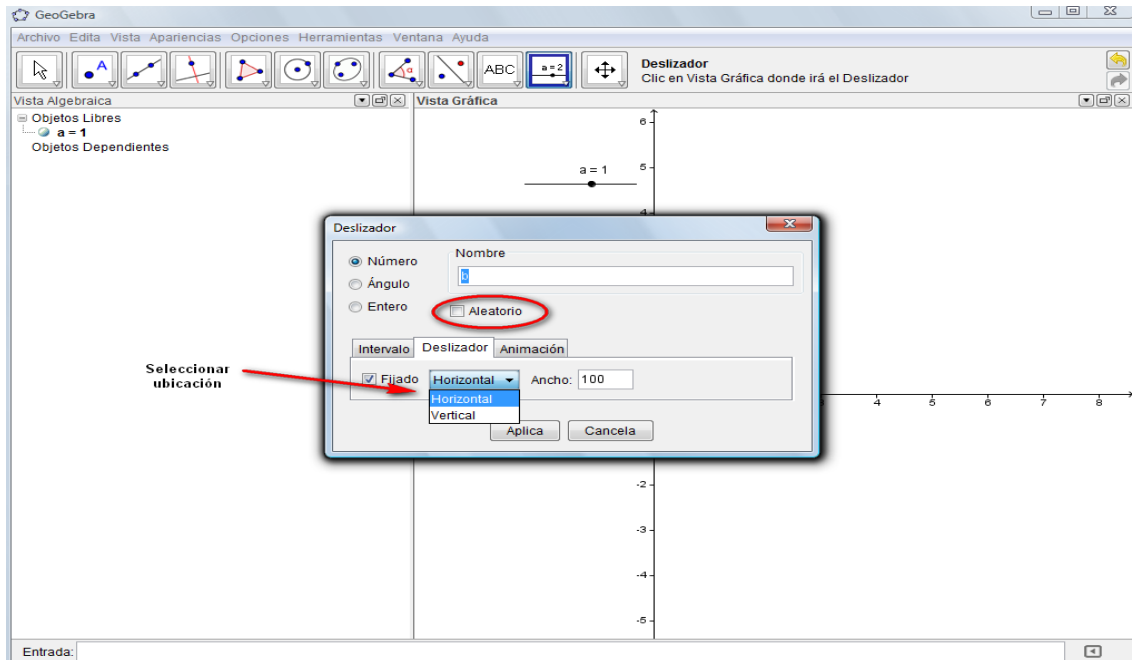


Figura 139: Ubicación del deslizador.

- ✓ Seleccionar el tipo de animación entre las opciones que presenta el cuadro de dialogo cuando se activa el botón animación, tal como se muestra en la figura 21.

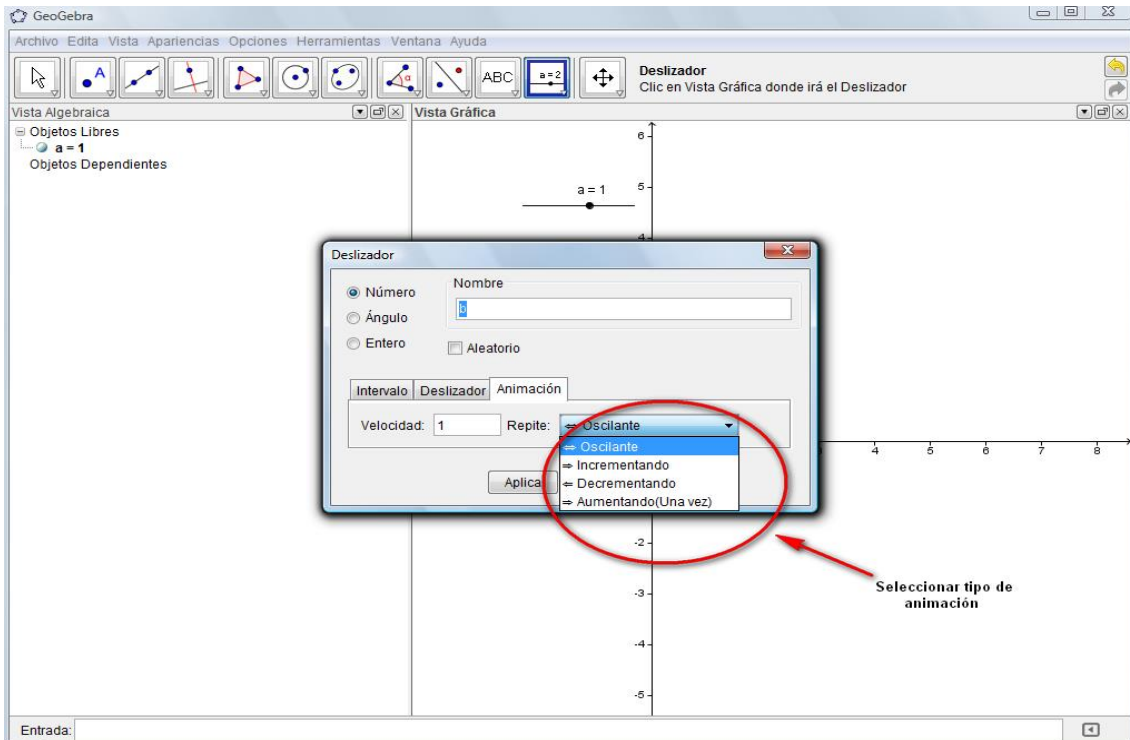


Figura 140: Tipo de animación.

### Animación manual y automática

- Una vez se haya creado el deslizador y se tenga la gráfica que se desea modificar, el deslizador puede ser manipulado de forma manual (ver video “Creación y Animación de deslizadores”) o de forma automática que puede ser activada tal como lo indica la figura 22.

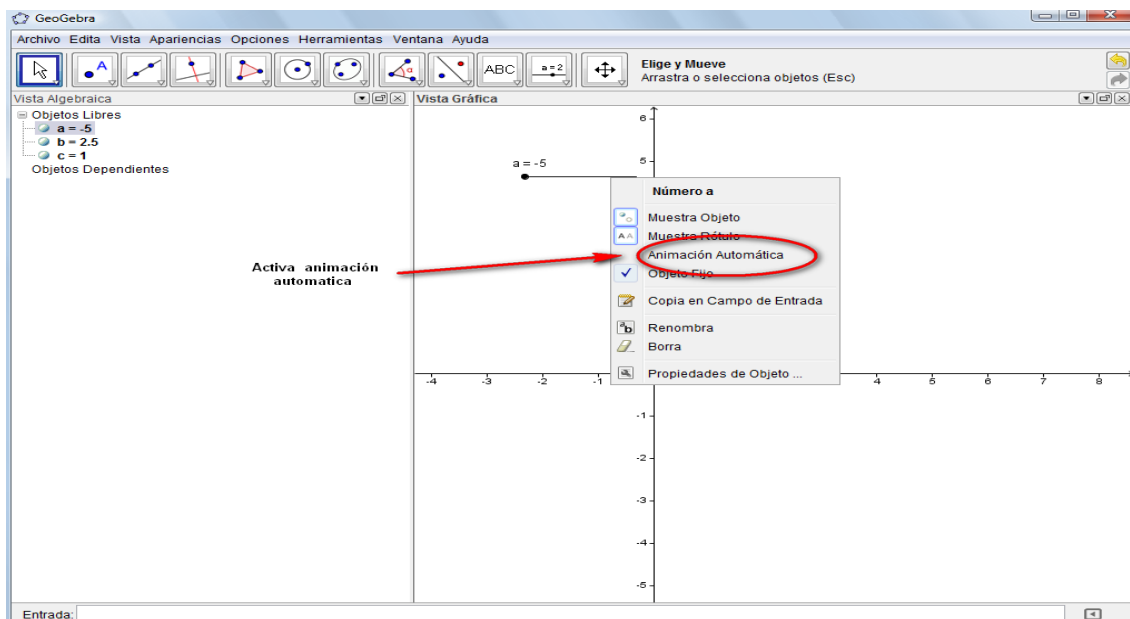


Figura 141: Activar animación automática.

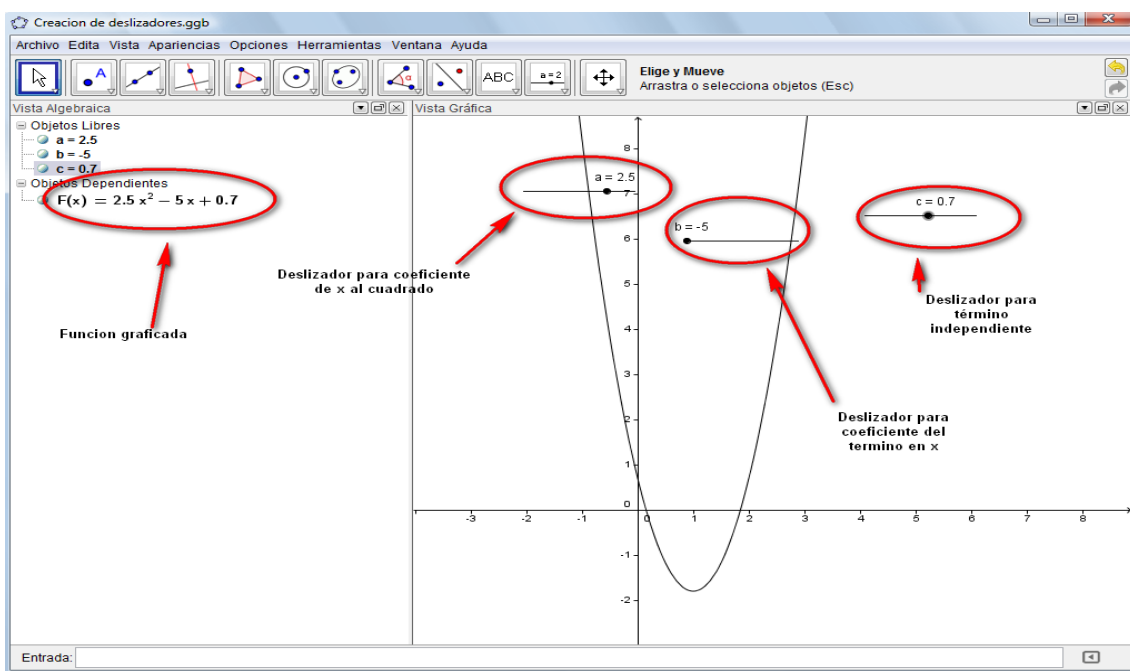


Figura 142: modelo de deslizadores.

- Una vez se hayan creado los deslizadores se puede visualizar el proceso activando el protocolo de construcción desde la opción Vistas de la Barra de Menús.

Protocolo de Construcción - Creacion de deslizadores.ggb

Nº	Nombre	Definición	Valor	Subtítulo
1	Número a		$a = 2.5$	
2	Número b		$b = -5$	
3	Número c		$c = 0.7$	
4	Función F	$F(x) = a x^2 + b x + c$	$F(x) = 2.5x^2 - 5x + 0.7$	

4 / 4

Figura 143: Protocolo de construcción de deslizadores.

- **Nota:** Observar video “Creación y Animación de deslizadores”

## Variación de las funciones en el plano

- Si  $f$  es una y  $k$  una constante positiva, entonces, las gráficas de:
  - $f(x) + k$ : Traslada hacia arriba  $k$  unidades
  - $f(x) - k$ : trasladada hacia abajo  $k$  unidades
  - $f(x + k)$ : Traslada hacia la izquierda  $k$  unidades
  - $f(x - k)$ : Traslada hacia la derecha  $k$  unidades
- Pueden obtenerse de la gráfica de  $f$ , por medio de un cambio o traslación vertical u horizontal, de un valor  $k$ .

**Ejemplo1:** Dada la función  $f(x) = \sqrt{x}$ , aplicar las traslaciones siguientes tomando  $k = 3$ :

- ✓  $f(x) + k$
- ✓  $f(x) - k$
- ✓  $f(x + k)$
- ✓  $f(x - k)$

Solución:

- ✓ Graficar la función original  $f(x) = \sqrt{x}$

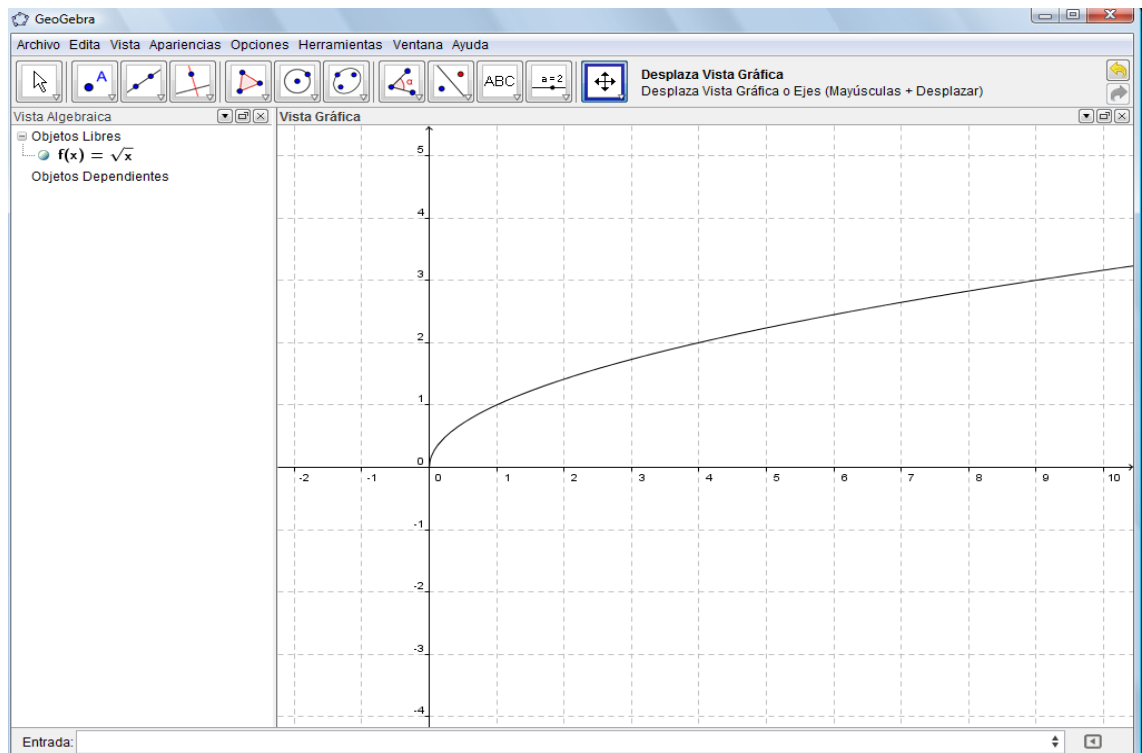


Figura 144

✓ Graficar la primer traslación  $g(x) = f(x) + k = \sqrt{x} + 3$

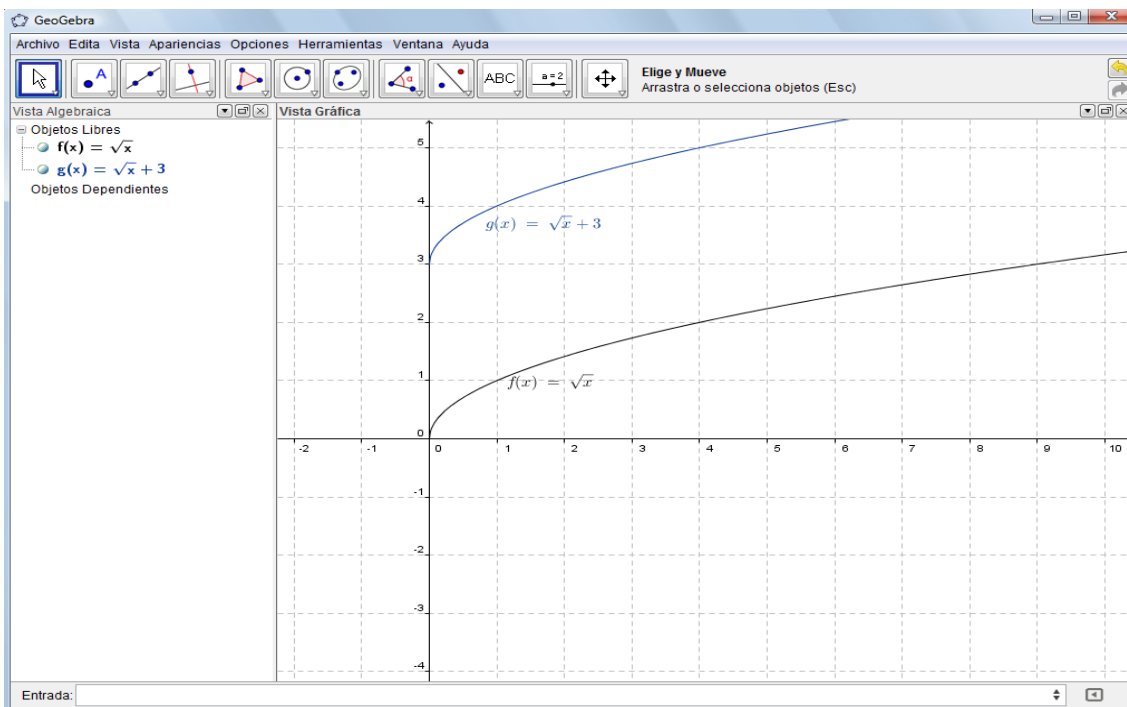


Figura 145. Traslación vertical hacia arriba

✓ Graficar la traslación  $h(x) = f(x) - k = \sqrt{x} - 3$

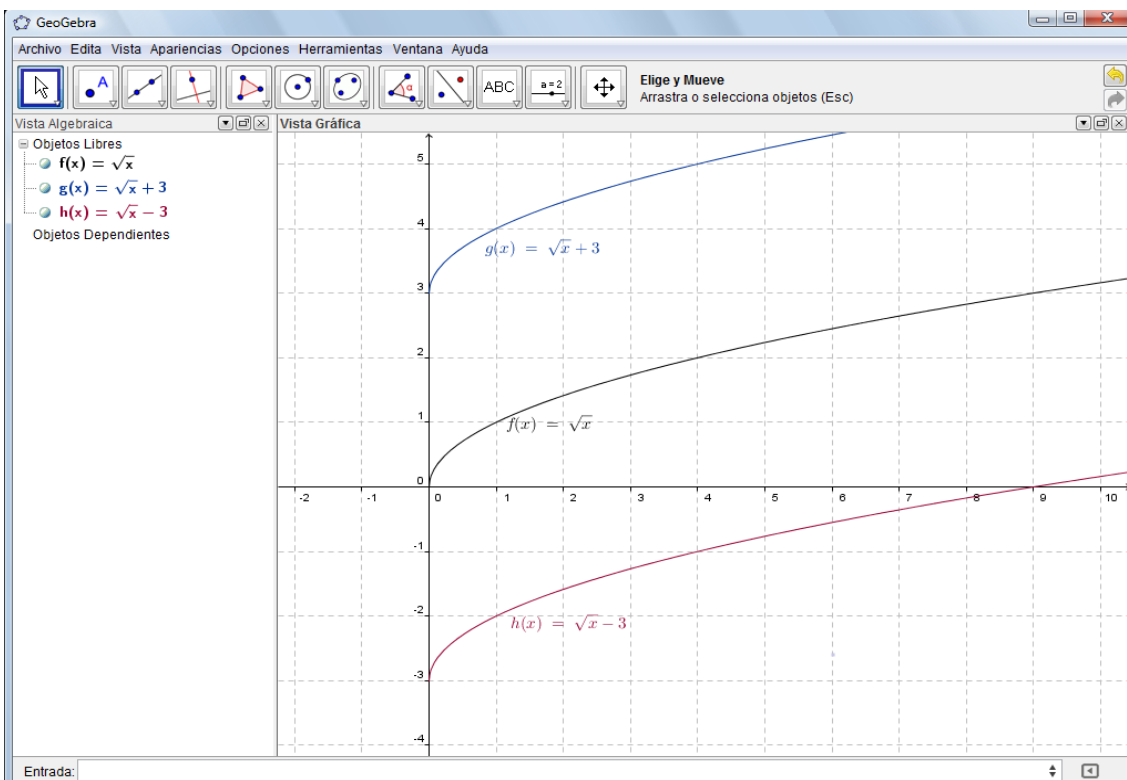


Figura 146: traslación vertical hacia abajo

✓ Graficar la traslación  $i(x) = f(x + k) = \sqrt{x + 3}$

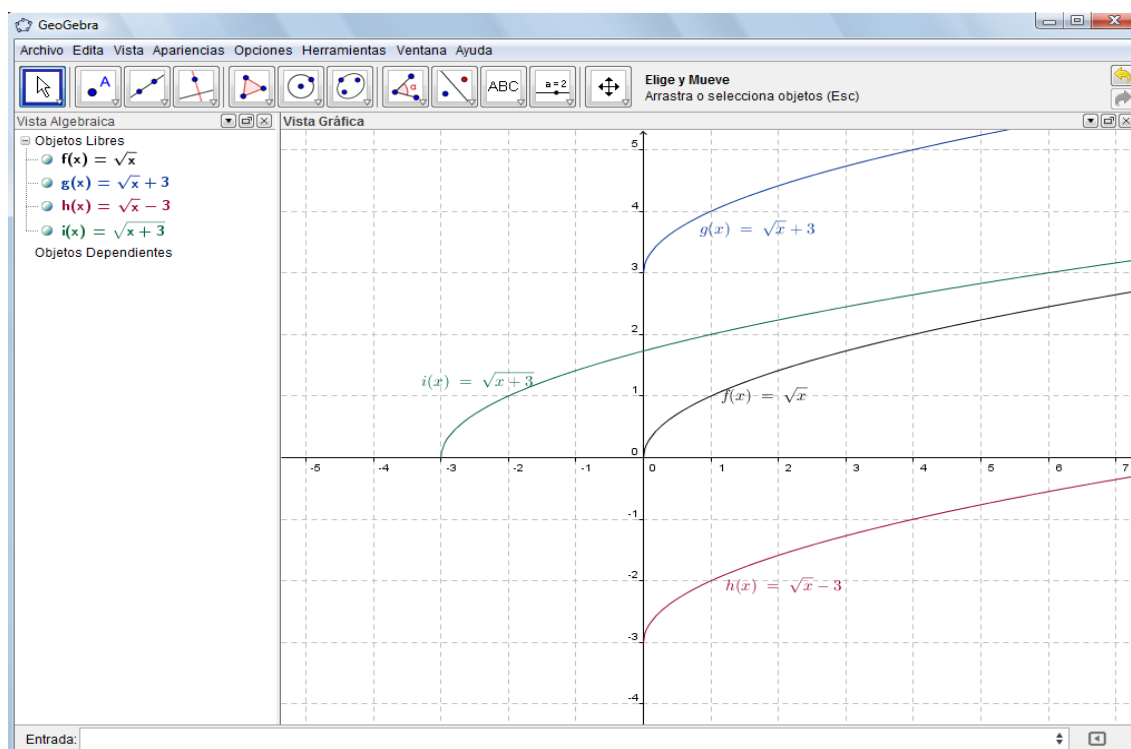


Figura 147: traslación horizontal a la izquierda

✓ Graficar la traslación  $j(x) = f(x - k) = \sqrt{x - 3}$

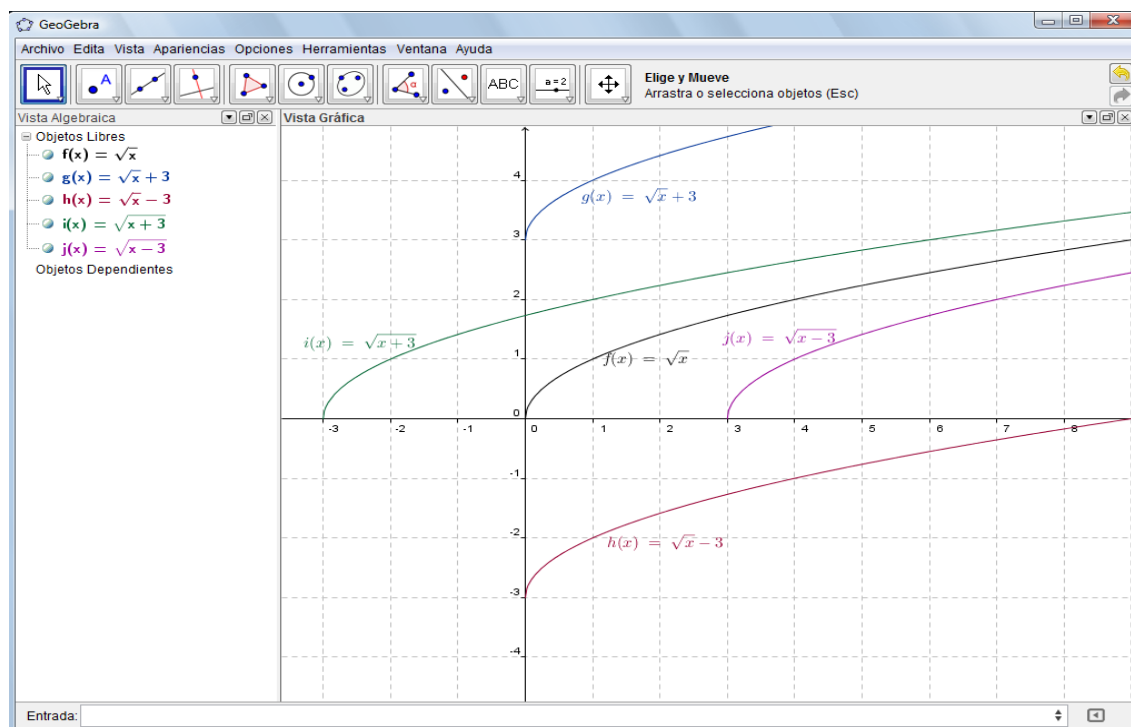


Figura 148: traslación horizontal a la derecha.



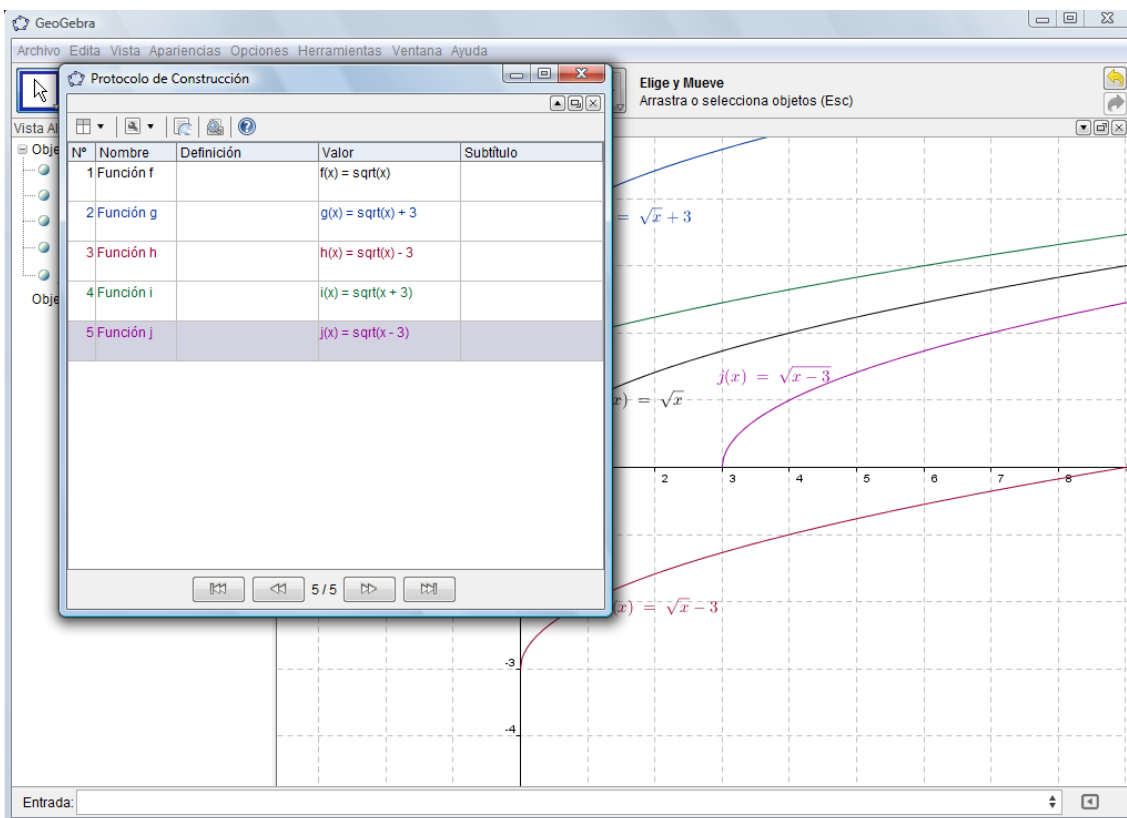


Figura 149: Protocolo de construcción de traslación de f raíz cuadrada.

**Ejemplo 2:** Dada la función  $f(x) = |x|$ , aplicarle las traslaciones con  $k = 2$ :

- ✓  $f(x) + k = g(x) = |x| + 2$
- ✓  $f(x) - k = h(x) = |x| - 2$
- ✓  $f(x + k) = i(x) = |x + 2|$
- ✓  $f(x - k) = j(x) = |x - 2|$

Solución

- ✓ Aplicar todas las transformaciones a la función  $f(x) = |x|$

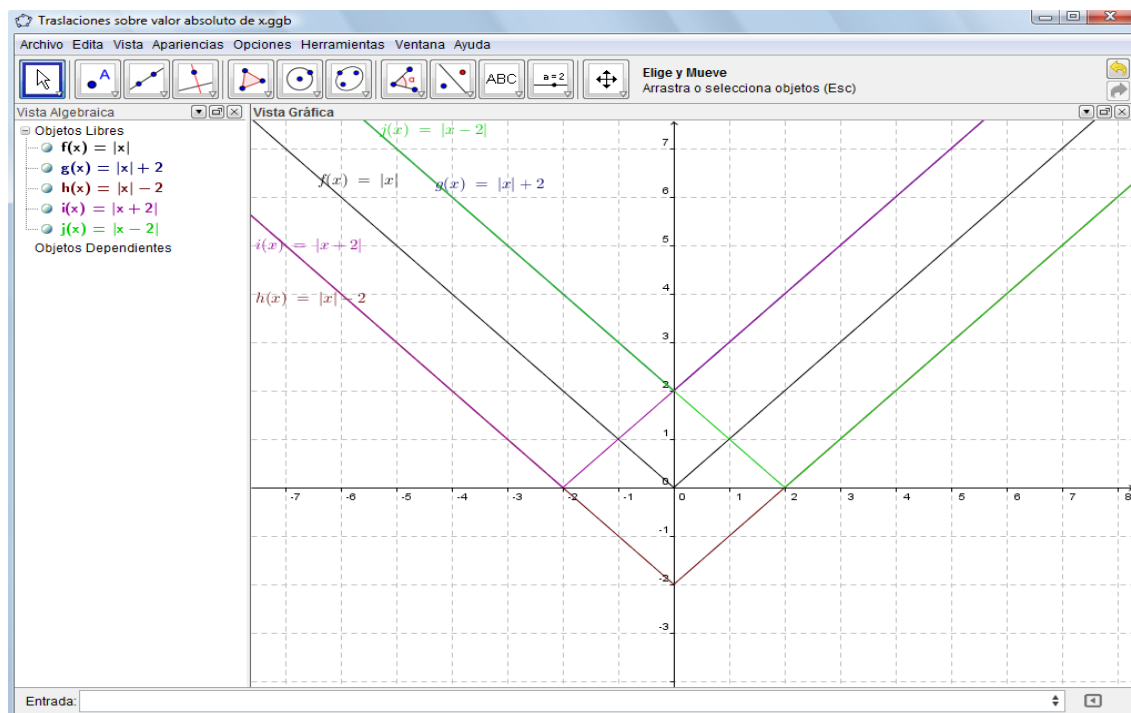


Figura 150: Transformaciones sobre valor absoluto de x.

✓ Observar el protocolo de construcción que se muestra en la figura 32.

Protocolo de Construcción - Traslaciones sobre valor absoluto de x...

Nº	Nombre	Definición	Valor	Subtítulo
1	Función f		$f(x) = \text{abs}(x)$	
2	Función g		$g(x) = \text{abs}(x) + 2$	
3	Función h		$h(x) = \text{abs}(x) - 2$	
4	Función i		$i(x) = \text{abs}(x + 2)$	
5	Función j		$j(x) = \text{abs}(x - 2)$	

5 / 5

Figura 151: protocolo de construcción transformaciones de valor absoluto de x

- La variación de las funciones se pueden realizar de manera más práctica haciendo uso de los deslizadores, obsérvese el ejemplo que se muestra en el video “Animación automática de funciones”. Aplicado a la función

$$f(x) = x^2$$

- Ver video “Variación de funciones en el plano”